ETHZ, D-MATH
Prüfung
Numerische Methoden D-PHYS, FS 2015
Dr. V. Gradinaru
20.8.2015

Prüfungsdauer: 180 Minuten

Maximal erreichbare Punktzahl: 60

1. Strang-Splitting und Störmer-Verlet-Verfahren (15 Punkte)

a) Verwenden Sie das Strang-Splitting um das Störmer-Verlet-Verfahren für Hamiltonsche Differentialgleichungen mit der Hamilton-Funktion:

$$H(p, q) = T(p) + V(q, t)$$

zu verallgemeinern. Entwickeln Sie den Algorithmus und fassen Sie ihn auf Papier zusammen. Implementieren Sie dann dieses Verfahren.

b) Berechnen Sie damit das angetriebene aber ungedämpfte Pendel:

$$T(p) = \frac{1}{2}p^2 \qquad V(q, t) = -\cos(q) - qA\cos(\omega t)$$

mit $\omega = 1$ und $A = 0.1$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, T]$ wobei $T = 100$. Die Anfangswerte seien $q(0) = 0$ und $p(0) = -1$. Nehmen Sie $N = 10^4$ Zeitschritte. Plotten Sie $q(t)$ und $p(t)$.

c) Finden Sie experimentell die Konvergenzrate des Verfahrens. Benutzen Sie $N \in [2^8, \ldots, 2^{16}]$ Schritte und vergleichen Sie die Lösungen $q(t)$ zur Endzeit T.

d) Berechnen Sie $I = \int_0^T |q(t)| \mathrm{d}t$ für die obige Konfiguration mit dem verallgemeinerten Störmer-Verlet-Verfahren für $q(t)$ und der summierten Trapezregel. Wie lautet der Wert von I?

e) Benutzen Sie nun `ode45` zur Berechnung von $q(t)$. Verwenden Sie die Trapezregel für nicht-äquidistante Quadraturpunkte und berechnen Sie wiederum das obige Integral.

2. Gebremste Präzession einer Magnetnadel (15 Punkte)

Die Präzession einer Magnetnadel in Gegenwart von Reibung wird vom Anfangswertproblem für die Position der Nadelspitze $\underline{y}(t)$ beschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}} &= \underline{f}\left(\underline{y}\right) := \underline{a} \times \underline{y} + c\,\underline{y} \times \left(\underline{a} \times \underline{y}\right) \\ \underline{y}(0) &= \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

mit $c > 0$ und $\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Das andere Ende sei im Ursprung fixiert.

a) Zeigen Sie, dass die euklidische Norm der Lösung $\underline{y}(t)$ erhalten bleibt.

Hinweis: Es gilt $\underline{x} \times \underline{y} \perp \underline{x}$.

b) Schreiben Sie die Definition der impliziten Mittelpunktsregel für eine autonome Differentialgleichung hin und formulieren Sie dann dieses Verfahren für das gegebene Anfangswertproblem.

c) Die *linear-implizite Mittelpunktsregel* kann durch Linearisierung der impliziten Mittelpunktsregel um den aktuellen Lösungswert $\underline{y}_t$ erhalten werden. Leiten Sie die definierende Gleichung der linear-impliziten Mittelpunktsregel für eine allgemeine autonome Differentialgleichung $\dot{\underline{y}}(t) = \underline{g}(\underline{y})$ mit glattem $\underline{g} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ her.

d) Implementieren Sie die linear-implizite Mittelpunktsregel. Die rechte Seite $\underline{f}$ und Jacobi Matrix $\mathbf{J_f}$ sind im Template gegeben.

e) Implementieren Sie die nicht-linearisierte implizite Mittelpunktsregel. Benutzen Sie 3 Newton-Schritte zur Lösung der Gleichung.

Achtung: Verwenden Sie hier kein `fsolve`.

Hinweis: Falls Sie die impliziten Mittelpunktsregeln nicht implementiert haben, so verwenden Sie im Folgenden nur `ode45`.

f) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Parameter $\underline{a} = [1,0,0]^{\mathrm{T}}$ und $c = 1$ mit Schrittweite $h = 0.01$ mit beiden Verfahren. Plotten Sie jeweils die drei Komponenten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ gegen die Zeit.

g) Plotten Sie die euklidische Norm beider numerischen Lösungen. Bleiben die Normen erhalten?

Siehe nächstes Blatt!

3. Design einer Rutsche (15 Punkte)

Sei der Lorentzian $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ein Architekt möchte eine Rutsche entwickeln, die so nah wie möglich am Graph der Funktion:

$$g(x) = \frac{1}{2} f(5x) + f(5x+5) \quad \text{mit} \quad x \in [-1, 1]$$

liegt. Dafür benutzt er ein Computerprogramm, das polynomiale Interpolation zur Darstellung von Funktionen verwendet.

a) Er nimmt $N + 1$ äquidistante Punkte in $[-1, 1]$, und verwendet sein Interpolationsprogramm mit einem Polynom vom Grad N. Probieren Sie diese Methode mit $N = 21$. Plotten Sie $g(x)$ und das Interpolationspolynom $p_N(x)$ an 10^3 Punkten `a = linspace(-1,1,1000)`. Kann das so entstandene Kunstobjekt zum Rutschen verwendet werden? Liefern grössere N bessere Ergebnisse?

b) Welches ist die optimale Wahl der Interpolationspunkte für ein allgemeines N? Werten Sie diese Interpolation für 21 Interpolationsknoten sowie g in `a` aus. Plotten Sie beide gegen `a`. Berechnen und notieren Sie den maximalen absoluten Fehler.

c) Bestimmen Sie numerisch die minimale Anzahl Interpolationspunkte, so dass der maximale Fehler in `a` kleiner als 10^{-3} ist.

d) Verwenden Sie eine geeignete Substitution und die Trapezregel, um

$$I(g) = \int_{-1}^{1} g(x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

numerisch zu approximieren. Plotten Sie den absoluten Fehler für $M \in [11, 21, \ldots, 151]$ Funktionsauswertungen. Warum kann man die Trapezregel nicht direkt (ohne Variablenwechsel) auf $I(g)$ anwenden? Plotten Sie auch den Fehler, der sich durch die direkte Anwendung der Mittelpunktsregel ergibt. Der exakte Wert dieses Integrals ist $I = 0.6721696847788537$.

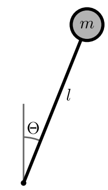
e) Sei p_N das Interpolationspolynom. Berechnen Sie $I(p_N)$ so effizient wie Ihnen möglich ohne die Trapezregel zu verwenden und plotten Sie den absoluten Fehler $|I - I(p_N)|$ für $N \in [10, 20, \ldots, 100]$.

Bitte wenden!

4. Exponentielles Verfahren (15 Punkte)

a) Schreiben Sie die Gleichung für das Kapitza Pendel:

$$l\ddot{\theta} = \left(g + \frac{1}{\varepsilon}\sin\frac{2\pi t}{\varepsilon}\right)\sin(\theta)$$



in der Form $\underline{\dot{u}} = \underline{f}(t, \underline{u})$. Die Parameter $g = 0.1$, $l = 0.05$, $\varepsilon = 10^{-2}$ und Anfangswerte $\theta(0) = 0$ und $\dot{\theta}(0) = -0.4$ führen zu einer stabilen Oszillation um den Höhepunkt des umgekehrten Pendels.

b) Begründen Sie, warum man das exponentielle Rosenbrock-Euler-Verfahren nicht direkt auf die Gleichung $\underline{\dot{u}} = \underline{f}(t, \underline{u})$ anwenden kann.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t_k := kh$ mit $k = 0, \dots, n$ und $h := T/n$. Es ist $\underline{u}_k$ eine numerische Approximation an $\underline{u}(t_k)$. Wir notieren $\mathbf{J}_k := \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}(t_k, \underline{u}_k)$ und $\underline{v}_k := \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, \underline{u}_k)$. Das Verfahren von Pope lautet dann:

$$\underline{u}_{k+1} = \underline{u}_k + h\varphi_1(h\mathbf{J}_k)\underline{f}(t_k, \underline{u}_k) + h^2\varphi_2(h\mathbf{J}_k)\underline{v}_k$$

wobei $\varphi_1(a) := \frac{e^a - 1}{a}$ und $\varphi_2(a) := \frac{\varphi_1(a) - 1}{a}$.

c) Schreiben Sie die Terme $h\varphi_1(h\mathbf{J})\underline{z}$ und $h^2\varphi_2(h\mathbf{J})\underline{z}$ aus dieser Methode für eine invertierbare Matrix $\mathbf{J}$ und einen Vektor $\underline{z}$ auf Papier auf und implementieren Sie die zwei Funktionen `hphi1` und `h2phi2` im Template.

Achtung: Berechnen Sie keine explizite Matrixinverse.

d) Implementieren Sie die Methode von Pope und simulieren Sie damit das Pendel von Kapitza. Was ist der maximale Auslenkungswinkel θ für $n = 2 \cdot 10^4$ Zeitschritte bis $T = 12$?

e) Wie viele Funktionsauswertungen braucht `ode45` mit `reltol` 10^{-6} und `abstol` 10^{-7} in diesem Fall? (Achtung: lange Laufzeit!)

f) Beweisen Sie, dass das exponentielle Rosenbrock-Euler-Verfahren für das autonomisierte System genau die Methode von Pope ist.