Dr. Vasile Gradinaru
Marco Petrella

Serie 11

Abgabedatum: Fr. 17.05, in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Marco Petrella, HG J 45 `marco.petrella@sam.math.ethz.ch`

Webpage: http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-1662-10L

1. *Gram-Schmidt Algorithmus*

Mit den Faktoren Q und R aus den Algorithmen und mit der Matrix $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen:

$$\mathbf{Z}_{ij} = 1 + \min(i,j), \quad 0 \leq i,j < n$$

aus der Aufgabe 3 Serie 10 (Gram-Schmidt, modifiziertes Gram-Schmidt) schreiben Sie ein Code, das die Matrizen $R_1, \ldots, R_n$ aus der Vorlesung zur Umschreibung des Gram-Schmidt Algorithmus als Multiplikation mit oberen Rechteckmatrizen berechnet. Verwenden Sie $n = 4$ und geben Sie Matrizen R_k und die Skalarprodukte der orthonomisierten Vektoren in jedem Schritt aus.

Hinweis: Die folgenden Algorithmen (in Pseudo-Code) liefern eine **QR**-Zerlegung nach dem *Gram-Schmidt-Verfahren* und dem *modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren*: beide algoritmen fangen mit $\mathbf{R} \equiv \mathbf{0}$ und $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{0}$ an.

Gram-Schmidt:

$\mathbf{v_1} = \mathbf{A}_{:1}$
$\mathbf{R}_{11} = \|\mathbf{v_1}\|_2$
$\mathbf{Q}_{:1} = \frac{\mathbf{v_1}}{\mathbf{R}_{11}}$
for $j = 2, \ldots, n$ **do**
  $\mathbf{v_j} = \mathbf{A}_{:j}$
  for $i = 1, \ldots, j-1$ **do**
    $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{Q_{:i}}^{\mathrm{T}}\mathbf{a_j}$
    $\mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} - \mathbf{R}_{ij}\mathbf{Q_{:i}}$
  end for
  $\mathbf{R}_{jj} = \|\mathbf{v_j}\|_2$
  $\mathbf{Q}_{:j} = \frac{\mathbf{v_j}}{\mathbf{R}_{jj}}$
end for

Modifiziertes Gram-Schmidt:

for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $\mathbf{V}_{:i} = \mathbf{A}_{:i}$
end for
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $\mathbf{R}_{ii} = \|\mathbf{v_i}\|_2$
  $\mathbf{q_i} = \frac{\mathbf{v_i}}{\mathbf{R}_{ii}}$
  for $j = i+1, \ldots, n$ **do**
    $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{q_i}^{\mathrm{T}}\mathbf{v_j}$
    $\mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} - \mathbf{R}_{ij}\mathbf{q_i}$
  end for
end for

2. *Householder-Algorithmus auf die Rotationsmatrix*

Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix $D(\phi)$ aus der Vorlesung. Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

3. *QR-Zerlegung*

Sei die Matrix A mit den Spaltenvektoren $[1, 1, 1, 1]^T$ und $[-2, 0, 1, 3]^T$.

a) Berechnen Sie auf Papier die zwei Spiegelungsmatrizen, die die QR-Zerlegungvon A realisieren und geben Sie die Faktoren Q und R an.

b) Berechnen Sie auf Papier die QR-Zerlegung von A mittels einer Spiegelung und zwei Drehungen.

4. *Konditionszahl*

Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, ist die Konditionszahl definiert durch

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}. \tag{1}$$

Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass für die euklidischen Norm gehörende Konditionszahl cond_2 gilt:

1. $\operatorname{cond}_2(A) = \operatorname{cond}_2(R) = \operatorname{cond}_2(\tilde{R}) \geq \frac{\max_{i=1,\ldots,n} |r_{ii}|}{\min_{k=1,\ldots,n} |r_{kk}|}$
2. $\operatorname{cond}_2(A^TA) = \operatorname{cond}_2(A)^2$

5. *Zerlegung einer reellen Matrix*

Es seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $m \leq n$. Zeigen Sie:

1. Falls $v^TMv > 0$ für alle $v \neq 0$ mit $Gv = 0$ und $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vollen Rang besitzt, so ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar.
2. Falls M symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine Zerlegung der Form

$$\begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ GL^{-T} & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & L^{-1}G^T \\ 0 & R \end{bmatrix} \tag{2}$$

   Wieviele Operationen sind zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer derartigen Matrix nötig?
   <u>*Hinweis*</u>: Cholesky-Zerlegung von M.