13.1. Für $u > 0$ benutzen wir die Identität

$$\int_0^t e^{-ux} \sin x \, dx = \frac{1}{1+u^2} \left[1 - e^{-ut}(u \sin t + \cos t) \right] . \tag{1}$$

Offenbar ist die Funktion $(0,t] \times (0,\infty) \ni (x,u) \mapsto |e^{-ux} \sin x|$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar. Wir erhalten deshalb mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{(0,t]\times(0,\infty)} |e^{-ux} \sin x| \, dx du &= \int_0^t \left(\int_0^\infty |e^{-ux} \sin x| \, du \right) dx \\
&= \int_0^t |\sin x| x^{-1} \, dx \\
&= \int_0^1 |\sin x| x^{-1} \, dx + \int_1^t |\sin x| x^{-1} \, dx \\
&\le const + t < \infty .
\end{aligned}$$

Daher ist $e^{-ux} \sin x$ in $L^1((0,t] \times (0,\infty), \lambda^2)$ und der Satz von Fubini liefert nun

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\sin x}{x} \, dx &= \int_0^t \sin x \left(\int_0^\infty e^{-ux} \, du \right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-ux} \sin x \, dx \right) du.
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (1) bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\sin x}{x} \, dx &= \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} - \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{1+u^2} (u \sin t + \cos t) \, du \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{1+u^2} (u \sin t + \cos t) \, du .
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass

$$\left| \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{1+u^2} u \sin t \, du \right| \le \int_0^\infty e^{-ut} \, du = t^{-1}$$

und

$$\left| \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{1+u^2} \cos t \, du \right| \le \int_0^\infty e^{-ut} \, du = t^{-1}$$

gilt. Deshalb bekommen wir

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

und sind fertig.

13.2. Mit Satz 4.2 gilt $\|fg\|_1 \le \|f\|_q \|g\|_p$. Wir haben

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|K(x,\cdot)f\|^p_{L^1(\lambda(dy))} dx\right)^{1/p} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}} \|K(x,\cdot)\|^p_{L^p(\lambda(dy))} \|f\|^p_{L^q(\lambda(dy))} dx\right)^{1/p} = \|f\|_{L^q(\lambda(dy))} \left(\int_{\mathbb{R}} \|K(x,\cdot)\|^p_{L^p(\lambda(dy))} dx\right)^{1/p} \\ &= \|f\|_q \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |K(x,y)|^p dy dx\right)^{1/p} = \|f\|_q \|K\|_{L^p(\lambda(dx)\times\lambda(dy))}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_q = 1} \|Tf\|_p \le \|K\|_{L^p(\lambda(dx)\times\lambda(dy))} < \infty.$$

13.3.

(a) Sei $f, g \in \mathcal{F}$ mit $f \le g$. Dann gilt $h = g - f \ge 0$, $h \in \mathcal{F}$. Weil J ist positiv, haben wir $J(h) \ge 0$ d.h. $J(g-f) \ge 0$. Mit linearität, $J(g) - J(f) \ge 0$. Somit, $J(g) \ge J(f)$ und J ist monoton.

(b) Sei $\lambda \in \Lambda$, $J_1, J_2 \subset \Lambda$ endlich, und $J_2 = J_1 \cup \{\lambda\}$.

Wir haben, $X^{-1}_{J_1}(\Omega_{J_1}) = \Omega_{J_1} \times \Omega_{\Lambda\setminus J_1} = \Omega_\Lambda$. Ähnlich $X^{-1}_{J_2}(\Omega_{J_2}) = \Omega_{J_2} \times \Omega_{\Lambda\setminus J_2} = \Omega_\Lambda$.

Somit mit die Konsistenzbedingung, $\mu_{J_1}(\Omega_{J_1}) = \mu_{J_2}(\Omega_{J_2})$. Dann gilt

$$\prod_{j\in J_1} \mu_j(\Omega_j) = \prod_{j\in J_2} \mu_j(\Omega_j).$$

Wir schliessen, dass $\mu_\lambda(\Omega_\lambda) = 1$.

13.4. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge $(f_n(m))_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_+$ mit $f_n(m) \nearrow h_n$ für $m \to \infty$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g(1) &= f_1(1) \\ g(2) &= f_1(2) \vee f_2(2) \\ g(3) &= f_1(3) \vee f_2(3) \vee f_3(3) \\ &\vdots \\ g(n) &= f_1(n) \vee f_2(n) \vee \cdots \vee f_n(n) \end{aligned}$$

und bemerken, dass $g(n) \in \mathcal{F}_+$ ist. Nach der Definition von $g(n)$ folgt sofort

$$g(n) \leq g(n+1)\,.$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} g(n) &\leq f_1(n+1) \vee f_2(n) \vee \cdots \vee f_n(n) \\ &\leq f_1(n+1) \vee f_2(n+1) \vee \cdots \vee f_n(n) \\ &\qquad\vdots \\ &\leq f_1(n+1) \vee f_2(n+1) \vee \cdots \vee f_n(n+1) \\ &\leq g(n+1)\,. \end{aligned}$$

Daher gilt $g(n) \nearrow$ für $n \to \infty$.

Wir fixieren $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $n \geq s$ $f_s(n) \leq g(n)$ und somit erhält man

$$h_s \leq \lim_n g(n), \quad s \in \mathbb{N}\,.$$

Darum folgt $h \leq \lim_n g(n)$.

Andererseits ist klar, dass

$$g(n) \leq h_1 \vee h_2 \vee \cdots \vee h_n = h_n \tag{2}$$

gilt. Deshalb bekommen wir $\lim_n g(n) \leq h$ und somit Gleichheit.

Nach der Definition von J^* folgt, weil $g(n)$ in $\mathcal{F}_+$ ist, dass

$$J^*(h) = \sup_n J(g(n)) = \lim_n J(g(n))$$

gilt. Wegen der Monotonie von J^* und aus (2) bekommt man

$$J(g(n)) = J^*(g(n)) \leq J^*(h_n)$$

und somit $J^*(h) \leq \lim_n J^*(h_n)$ gilt.

Schliesslich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ noch wegen Monotonie $J^*(h_n) \leq J^*(h)$ und wir sind fertig.