2.1. Sei $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}_{>0}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen. Wir müssen zeigen dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n (A_m).$$

Die Übung reduziert sich darauf zu zeigen, dass wir die Reihenfolge der Summierungen vertauschen können. Tatsächlich gilt, weil μ_n Masse sind,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n \mu_n \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \right) \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n (A_m) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n (A_m)\end{aligned}$$

Sei $\alpha_{NM} := \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \lambda_n \mu_n (A_m)$. Weil $\mu_n, \lambda_n \geq 0$, ist dann α_{NM} monotone in N und M. Es folgt, dass

$$\alpha_{NM} \nearrow \alpha_{\infty,M} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n (A_m), \ N \nearrow \infty$$

und

$$\alpha_{NM} \nearrow \alpha_{N,\infty} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n (A_m), \ M \nearrow \infty.$$

Ausserdem haben wir, dass

$$\alpha_{\infty,M} \nearrow \alpha_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n (A_m), \ M \nearrow \infty$$

und

$$\alpha_{NM} \nearrow \alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n (A_m), \ N \nearrow \infty.$$

`Behauptung:` $\alpha_1 = \alpha_2$.

Wir fixieren ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Es gibt $N_0, K_0 > 0$ s.d.

$$\alpha_1 \geq \alpha_{\infty,K_0} \geq \alpha_{N_0,K_0} \geq \alpha_{N_0,\infty} - \varepsilon \geq \alpha_2 - 2\varepsilon.$$

Ähnlich,

$$\alpha_2 \geq \alpha_{N_0,\infty} \geq \alpha_{N_0,K_0} \geq \alpha_{\infty,K_0} - \varepsilon \geq \alpha_1 - 2\varepsilon.$$

Wir schliessen, dass $\alpha_1 = \alpha_2$ und, dass wir Summierungen vertauschen können.

2.2.

(a) Für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ ist klar, dass

$$\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \,,$$

weil für $i \geq \max\{m, n\}$

$$\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

gilt. Deshalb folgt für jedes n

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

und damit

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \,.$$

(b) Wir setzen $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq A_n$, $C_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supseteq A_n$ und bemerken, dass

$$B_n \uparrow \liminf_n A_n$$

und

$$C_n \downarrow \limsup_n A_n \,.$$

gilt. Nach Satz 2.6 folgt

$$\mu(\liminf_n A_n) = \lim_n \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu\left(A_n\right)$$

und weil μ endlich ist

$$\limsup_n \mu\left(A_n\right) \leq \lim_n \mu(C_n) = \mu(\limsup_n A_n) \,.$$

(c) Da $\limsup_n A_n \subseteq \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$ gilt, bekommen wir, dass

$$\mu\left(\limsup_n A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) .$$

Wir bemerken, dass für jedes $N \geq m$

$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^{N} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{N} \mu\left(A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu\left(A_k\right)$$

gilt. Deshalb gilt nach Stetigkeit von unten $\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu\left(A_k\right)$, wenn $N \to \infty$. Somit erhalten wir

$$\mu\left(\limsup_n A_n\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu\left(A_k\right) .$$

Weil die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right)$ konvergiert, folgt $\lim_m \sum_{k=m}^{\infty} \mu\left(A_k\right) = 0$ und die gewünschte Aussage.

2.3. Aus der Vorlesung wissen wir, dass F eine càdlàg-Funktion ist (d.h. in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist F rechtsstetig und der linksseitige Grenzwert existiert). Aus der Annahme folgt, dass F aufsteigend ist. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ und dann

$$F(n) - F(-n) \geq \delta \times \sum_x I_{\{F(x)-F(x-):\ -n<x\leq n \text{ und } F(x)-F(x-)\geq\delta\}}.$$

Somit ist die Anzahl der Unstetigkeitpunkte mit $\mu(\{x\}) = F(x) - F(x-) \geq \delta > 0$ endlich. Sei $A_n = (-n, n]$ und $B_\delta = \{x : F(x) - F(x-) \geq \delta\}$.

Damit folgt, dass die Menge

$$\Theta_n := \bigcup_{\delta>0,\, \delta\in\mathbb{Q}} (A_n \cap B_\delta)$$

höchstens abzählbar ist.

Weil $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, schliessen wir, dass

$$\Theta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Theta_n$$

höchstens abzählbar ist.

2.4.

(a) Sei $E \in \mathcal{A}$ und $s(E) = \{F \subseteq E, \mu(F) < \infty\}$. Sei

$$\mu_0(E) = \sup_{A\in s(E)} \mu(A) = \infty.$$

Durch die Definition des Supremums haben wir, dass für alle $M > 0$ ein $S \in s(E)$ existiert mit

$$\infty > \mu(S) > M.$$

Somit gilt

$$\mu_0(S) = \sup_{A\in s(S)} \mu(A) < \infty$$

d.h. μ_0 ist σ-semiendlich. Wir müssen zeigen, dass μ_0 ein Mass ist. $\mu_0(\varnothing) = 0$ ist trivial. Jetzt nehmen Sie $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, paarwise disjunkte Mengen. Dann ist

$$\begin{aligned}\mu_0\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right) &= \sup\{\mu(F) : F \subseteq \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i, \mu(F) < \infty\} \\ &= \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) : \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} F_i \subseteq \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i, \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) < \infty,\ F_i \text{ paarwise disjunkte}\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup\{\mu(F_i) : F_i \subseteq A_i, \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) < \infty\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup\{\mu(F_i) : F_i \subseteq A_i, \mu(F_i) < \infty\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i).\end{aligned}$$

Fúr die umgekehrte Ungleichung fixieren wir $\varepsilon > 0$. Es gibt $F_i \in s(A_i)$, so dass

$$\sup\{\mu(F_i) : F_i \subseteq A_i, \mu(F_i) < \infty\} - \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \mu(F_i) < \infty.$$

Durch Summieren über bekommen wir, dass wegen $F_i \subseteq A_i$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup\{\mu(F_i) : F_i \subseteq A_i, \mu(F_i) < \infty\} \leq\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) + \varepsilon \leq \mu\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} F_i\right) + \varepsilon$$

Somit, weil ε beliebig ist,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup\{\mu(F_i) : F_i \subseteq A_i, \mu(F_i) < \infty\} \leq \sup\{\mu(F) : \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} F_i = F, F_i \subseteq A_i, \mu(F_i) < \infty\}$$

Sei $E_k = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$, dann ist $\mu(E_k) < \infty$, wenn $\mu(F_i) < \infty$ ist. Daraus folgt

$$\sup_{k<\infty} \mu(E_k) = \mu(F),$$

wobei $F = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} F_i$. Somit,

$$\sup\{\mu(F) : \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} F_i = F, F_i \subseteq A_i, \mu(F_i) < \infty\} \leq \mu_0\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right).$$

Wir schliessen, dass

$$\mu_0\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sup\{\mu(F_i) : F_i \subseteq A_i, \mu(F_i) < \infty\}$$

und μ_0 ein Mass ist.

(b) Sei $E \in \mathcal{A}$. Wenn $\mu(E) < \infty$, dann ist die Aussage klar ($\mu(E) = \mu_0(E)$).

`Behauptung:` Ist μ ein σ-semiendliches Mass und $\mu(E) = \infty$, dann gibt es für alle $C > 0$ ein $F \subset E$ mit $C < \mu(F) < \infty$.

Nehmen wir an, $C > 0$ sei so, dass für alle $F \subset E$ gilt $0 < \mu(F) \leq C$ oder $\mu(F) = \infty$. Sei $M = \sup\{\mu(F) : F \in s(E)\}$ und $M \leq C$. $M > 0$ ist, weil μ σ-semiendlich ist. Sei $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq s(E)$ so, dass

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset E.$$

Somit ist

$$\lim_{i \to \infty} \mu(F_i) = M$$

Sei $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Ausserdem $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) = \infty - M = \infty$. μ ist σ-semiendlich, und dann existiert $A \subset E \setminus F$, $\mu(A) < \infty$. Aber $A \cup F \in s(E)$ und $\mu(F) = M < \mu(A) + \mu(F) < \infty$. Widerspruch!

Jetzt sei $\mu(E) = \infty$. Nehmen wir an, dass $\mu_0(E) < \infty$. Durch die Behauptung haben wir, dass es ein $F \subset E$ gibt mit $\mu_0(E) < \mu(F) < \infty$. Widerspruch! Somit ist $\mu_0(E) = \infty$. Wir schliessen, dass $\mu = \mu_0$.

(c) Sei

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \forall F \subseteq A,\ \mu(F) = \mu_0(F) \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wir überprüfen, dass $\mu = \mu_0 + \nu$ und dass ν ein Mass ist. Sei $A \in \mathcal{A}$.

Fall 1. $\mu(A) < \infty$. Wir haben, dass $\mu_0(A) = \mu(A)$ und $\nu(A) = 0$.
Fall 2. $\mu(A) = \infty$, $\mu_0(A) < \infty$. Wir haben, dass $\nu(A) = \infty$, und es ist klar, dass $\mu(A) = \infty = \mu_0(A) + \nu(A) = \infty$.
Fall 3. $\mu(A) = \infty$, $\mu_0(A) = \infty$. Trivial.

Somit, $\mu = \mu_0 + \nu$. Warum ist ν ein Mass? $\nu(\varnothing) = 0$ ist klar. Jetzt seien $\{A_i\}$ paarwise disjunkte Mengen, $\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i = A$.

Fall 1. Wir nehmen an, dass für alle i: $\forall F \subseteq A_i,\ \mu(F) = \mu_0(F)$. Somit ist $\nu(A_i) = 0$. Sei $G \subseteq A$ und dann $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} G \cap A_i$ mit $\mu_0(G \cap A_i) = \mu(G \cap A_i)$. Somit, $\mu_0(G) = \mu(G)$, und $\nu(A) = 0$.

Fall 2. Sonst, existiert ein A_i so, dass es $F \subseteq A_i \subseteq A$ gibt mit $\mu(F) \neq \mu_0(F)$. Somit ist $\nu(A_i) = \infty = \nu(A)$ und $\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$.

Wir schliessen, dass ν ein Mass ist.