**5.1.** Wir betrachten die offenen Mengen

$$A_{n,\varepsilon} := \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| < n,\, |f'(x)| < 2^{-n}\varepsilon \right\} .$$

Wir können $A_{n,\varepsilon}$ darstellen als

$$A_{n,\varepsilon} = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} I_{k,n}$$

mit $I_{k,n} := (a_{k,n}, b_{k,n})$ offenen und paarweise disjunkten Intervallen,

$$b_{k,n} > a_{k,n}, k, n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lambda\left(f(A_{n,\varepsilon})\right) &= \lambda\left(f\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} I_{k,n}\right)\right) \\
&\leq \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f(I_{k,n})\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\left(f(I_{k,n})\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sup_{x\in\bar{I}_{k,n}} f(x) - \inf_{x\in\bar{I}_{k,n}} f(x) \right) ,
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $f$ stetig ist; also ist das Bild wieder ein Intervall. Daher bekommen wir mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
\lambda\left(f(A_{n,\varepsilon})\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon(b_{k,n} - a_{k,n}) = 2^{-n}\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty}(b_{k,n} - a_{k,n}) \\
= 2^{-n}\varepsilon\lambda(A_{n,\varepsilon}) \leq 2^{-n}\varepsilon\, 2n = 2^{1-n}n\varepsilon\, ,
\end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda(f(A)) &\leq \lambda\left(f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,\varepsilon}\right)\right) \\
&\leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f\left(A_{n,\varepsilon}\right)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(f(A_{n,\varepsilon})) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}n\varepsilon\, ,
\end{aligned}$$

wobei wir (1) benutzt haben. Wir schliessen $\lambda(f(A)) \leq 4\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und sind fertig.

**5.2.**

**(a)** $\mathbb{R}\backslash F$ ist eine offene Menge. Somit existieren paarweise disjunkte Mengen $\{(a_k, b_k)\}$ mit $\mathbb{R} \setminus F = \biguplus_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$. Sei $h_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}$, $h_k(a_k) = f(a_k),\ h_k(b_k) = f(b_k)$. Das ist wohldefiniert weil $a_k, b_k \in F$. Für alle $x \in [a_k, b_k]$ definieren wir

$$h_k(x) = \frac{b_k - x}{b_k - a_k} f(a_k) + \frac{x - a_k}{b_k - a_k} f(b_k) = f(a_k) + \frac{x - a_k}{b_k - a_k}(f(b_k) - f(a_k)).$$

Damit ist $h_k$ stetig für alle $k \geq 1$.

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F \\ h_k(x), & x \in [a_k, b_k] \end{cases}$$

Es ist klar dass $g$ wohldefiniert ist. $g$ ist stetig, weil $h_k$ und $f$ stetig sind und

$$\lim_{x \nearrow a_k} g(x) = \lim_{x \nearrow a_k} f(x) = f(a_k) = \lim_{x \searrow a_k} h_k(x) = \lim_{x \searrow a_k} g(x),$$

und analog für $b_k$.

**(b)** Sei $\psi\colon C \to [0, 1]$ die Cantor-Funktion mit

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varphi(x_k),$$

wobei $\varphi(0) = 0, \varphi(2) = 1$ und $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \in C$, $x_k \neq 1$. Wir erlauben nicht eindeutige Erweiterungen, so dass $x = 3^{-n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k} \in C$.

Weil $C$ eine abgeschlossene Menge ist, existiert eine stetige Funktion $\tilde{\psi}\colon [0, 1] \to [0, 1]$ mit

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in C \\ h_k(x), & x \in [a_k, b_k] \end{cases},$$

wobei die Funktionen $h_k$ definiert wie in **(a)** sind. $\psi$ ist stetig auf $C$, weil $C$ aud lauter isolierten Punkten besteht. $\tilde{\psi}$ ist stetig und monoton, weil $\psi$ monoton ist. Sei $x \in (3^{-n}, 2 \cdot 3^{-n}) \not\subset C$; dann ist

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{2 \cdot 3^{-n} - x}{3^{-n}} \psi(3^{-n}) + \frac{x - 3^{-n}}{3^{-n}} \psi(2 \cdot 3^{-n}) = 2^{-n}.$$

Für $x = \frac{3}{2}3^{-n}$ gilt
$$\frac{\tilde{\psi}\left(\frac{3}{2}3^{-n}\right)}{\frac{3}{2}3^{-n}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$
Wir schliessen, dass $\tilde{\psi}$ nicht Lipschitz ist, und $f = \tilde{\psi}$, $A = C$ genügt.

Wir müssen zeigen, dass $|\tilde{\psi}'(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0,1] \setminus C$. Sei $x \in C$, so dass existiert $k$ mit $x + 3^{-k} \in C$ und $(x, x+3^{-k}) \cap C = \emptyset$. Somit ist $\psi(x) = \psi(x+3^{-k})$, sonst $\psi(x+3^{-k}) - \psi(x) > 2^{-k_0}$. Dann, sei $x_0 = x + 2 \cdot 3^{-k_0} \in C$ und $x_0 \in (x, x+3^{-k})$. Wir haben $\psi$ ist konstant am $(x, x+3^{-k})$ und $\tilde{\psi}'(x) = 0$ für alle $x \in [0,1] \setminus C$.

**Bemerkung**

- Wir bezeichnen $\tilde{\psi}$ auch als die Teufelstreppen-Funktion.
- $\tilde{\psi} = F$, wobei $F$ die Verteilungsfunktion auf $\psi$ des Cantormasses $\mu_C$ ist.

**5.3.**

**(a)** Sei $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Lebesgue-messbaren Mengen. In Serie 2 haben wir bewiessen, dass
$$\lambda(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \lambda(E_n), \text{ wobei}$$
$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} E_k.$$
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, und $E_k = \{x \in D : \ f_k(x) > \alpha\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit
$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} E_n &= \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} E_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} \{x \in D : \ f_k(x) > \alpha\} \\ &\supseteq \{x \in D : \ f(x) > \alpha\}.\end{aligned}$$
Wir schliessen dass $\lambda(\{x \in D : \ f(x) > \alpha\}) \leq \liminf_{n\to\infty} \lambda(E_n)$.

**(b)** Ein analoges Argument gilt für $E_k = \{x \in D : \ f_k(x) \leq \alpha\}$.

**(c)** Seien $D = [0,1]$, $f(x) = 1$ und $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ für alle $x \in D$. Somit $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$ für alle $x \in D$. Aber
$$\lambda(\{x \in D : \ f_n(x) \geq 1\}) = 0$$
und
$$\lambda(\{x \in D : \ f(x) \geq 1\}) = 1.$$

**5.4.** Wir zeigen die $\mu$-fast Messbarkeit von $f(x) := F(x, u(x))$ in zwei Schritten.

**(a)** Wir nehmen zunächst an, $u$ sei eine Treppenfunktion, d.h. $u = \sum_{i=1}^{N} a_i I_{A_i}$ mit $a_i \in \mathbb{R}, A_i \subseteq G$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen. Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \{x \in G : F(x, u(x)) \in A\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{x \in G : u(x) = r, F(x, r) \in A\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \Big(F(\cdot, r)^{-1}(A) \cap u^{-1}(r)\Big) \\ &= \bigcup_{i=1}^{N} \Big(F(\cdot, a_i)^{-1}(A) \cap u^{-1}(a_i)\Big) \ . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $F(\cdot, r)$ Borel-messbar, d.h. $F(\cdot, a_i)^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ für alle $a_i$. Zudem ist $u^{-1}(a_i) = A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Daher ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $f$ Borel-messbar.

**(b)** Sei $u$ messbar. Nach Satz 1.17 existiert eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k \to \infty} u_k(x) = u(x)$ für alle $x \in G$.

Die Menge $N' := \{x \in G : F(x, \cdot) \text{ nicht stetig}\}$ ist nach Voraussetzung Teilmenge eines $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(N) = 0$. Setze $\tilde{f}_k : G \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}_k(x) := \begin{cases} F(x, u_k(x)), & x \notin N \\ 0, & x \in N \, . \end{cases}$$

Für $A \subseteq \mathbb{R}$ offen zerlegen wir

$$\tilde{f}_k^{-1}(A) = (F(\cdot, u_k(\cdot))^{-1}(A) \cap (G \setminus N)) \cup (0^{-1}(A) \cap N) \, ,$$

und damit ist $\tilde{f}_k$ Borel-messbar. Da $F(x, \cdot)$ für $x \notin N$ stetig ist und $\tilde{f}_k(x) = 0$ für $x \in N$, konvergiert $\tilde{f}_k$ punktweise gegen

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} F(x, u(x)) = f(x), & x \notin N \\ 0, & x \in N \, . \end{cases}$$

Also ist $\tilde{f}$ als Grenzwert Borel-messbarer Funktionen wieder Borel-messbar.

Ausserdem gilt $\left\{f \neq \tilde{f}\right\} \subseteq N$ und wir sind fertig.