6.1. Wegen
$$\left|\int f d\mu\right| = \int |f| d\mu$$
ist entweder $\int f d\mu = +\int |f| d\mu$ oder $\int f d\mu = -\int |f| d\mu$. Nehmen wir an, es gelte ersteres. Hätte die Menge
$$N = \{x \in \Omega : f(x) = -|f(x)| \neq 0\}$$
positives Mass, so gälte
$$\int f d\mu = \int f I_N d\mu + \int f I_{N^c} d\mu = \int -|f| I_N d\mu + \int |f| I_{N^c} d\mu < \int |f| d\mu,$$
im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $f \geq 0$ μ-f.ü. Den Fall $\int f d\mu = -\int |f| d\mu$ zeigt man analog.

6.2.

(a) Zur Erinnerung: falls f messbar ist, dann sind auch f^+, f^- und $|f|$ messbar. Ausserdem gilt
$$f = f^+ - f^-\,, \quad f^+ \geq 0\,,\ f^- \geq 0$$
und
$$|f| = f^+ + f^-\,.$$
Zuletzt gilt
$$f, g \in \mathcal{E}_+^*\,,\quad f \leq g\ \Rightarrow I(f) \leq I(g)\,. \tag{1}$$

1) ⇒ 2) Es gilt $|f|$, f^+, $f^- \in \mathcal{E}_+^*$ und offenbar $|f| \geq f^+$ und $|f| \geq f^-$. Aus der Gleichung (1) folgt
$$\int f^+\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu < \infty\,,$$
$$\int f^-\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu < \infty\,,$$
und wir sind fertig.

2) ⇒ 1) Weil
$$\int |f|\, d\mu = \int (f^+ + f^-)\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu < \infty$$
ist, folgt die Behauptung.

1) ⇔ 3) Da $||f|| = |f|$ gilt, sind wir fertig.

2) ⇒ 4) Offenbar genügen $h_1 := f^+, h_2 := f^-$.

4) ⇒ 5) Wir setzen $g := h_1 + h_2 \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ und bemerken, dass $g \geq f^+ + f^- = |f|$ gilt.

5) ⇒ 1) Das folgt aus der Gleichung (1) und wir sind fertig.

(b) Offenbar können wir o.B.d.A. annehmen, dass $f \geq 0$ und $f(x) < \infty$ ist. Deshalb können wir f mit einer Folge $(f_n)_n \in \mathcal{E}_+$ mit

$$f_n(\omega) \nearrow f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

approximieren. Wir können auch die f_n in einer Normaldarstellung schreiben und erhalten

$$f_n(\omega) = \sum_{i=1}^{L(n)} a_i'(n) I_{A_i'(n)}(\omega) .$$

Definitionsgemäss gilt deshalb

$$\int f_n \, d\delta_x = \sum_{i=1}^{L(n)} a_i'(n) \delta_x \left(A_i'(n) \right) = a_{i_x}'(n) ,$$

wobei i_x als der endeutige Index mit $x \in A_{i_x}'(n)$ bestimmt wird. Es ist jetzt klar, dass

$$\int f_n \, d\delta_x = a_{i_x}'(n) = f_n(x) .$$

Nach Voraussetzung gilt $f_n(x) \nearrow f(x)$ und deshalb erhalten wir definitionsgemäss das Integral

$$\int f \, d\delta_x = f(x) .$$

Wir folgern, dass genau dann $f : \Omega \to [0, \infty]$ in $\overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ ist, wenn $f(x) < \infty$ ist.

6.3.

(a) Sei $k : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $n \mapsto k(n)$ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Wir definieren $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ als

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{k(1), k(2), ..., k(n)\} , \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist für jedes n die Funktion g_n Riemann-integrierbar auf $[0,1]$ mit

$$\int_0^1 g_n(x) \, dx = 0$$

und daher ist $\lim_n \int_0^1 g_n(x)\,dx = 0$.

Ausserdem gilt für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x)\,.$$

Zuletzt gilt für alle $x \in [0,1]$

$$\lim_n g_n(x) = I_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) =: g_\infty(x).$$

`Behauptung:` g_∞ besitzt kein Riemann-Integral auf $[0,1]$.

Seien $(x_k)_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[0,1]$, $x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < x_n = 1$ und $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}],\ 0 \leq k \leq n-1$.

Fall $\xi_k \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ \forall k$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_\infty(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = 1$$

Fall $\xi_k \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1],\ \forall k$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_\infty(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

Somit g_∞ besitzt kein Riemann-Integral auf $[0,1]$.

(b) Sei

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n,\ 2^{-n} \leq x \leq 2^{-n+1} \\ 0,\ \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist klar, dass $f_n \in \mathcal{E}_+$ für alle $n \geq 1$.

`Behauptung 1:` $\int_{(0,1)} f_n d\lambda = 1,\ n \geq 1$.

Wegen $f_n \in \mathcal{E}_+$ gilt

$$\int_{(0,1)} f_n d\lambda = 0 \cdot \lambda((0,1) \setminus [2^{-n}, 2^{-n+1}]) + 2^n \cdot \lambda([2^{-n}, 2^{-n+1}]).$$

Somit $\int_{(0,1)} f_n d\lambda = 2^n \cdot 2^{-n} = 1$.

`Behauptung 2:` $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in (0,1)$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in (0,1)$. Es existiert $k \in \mathbb{N}$, so dass $2^k \leq x \leq 2^{-k+1}$, $f_k(x) = 2^k$. Nehmen Sie $N = k+1$ (d.h. $x \geq 2^{-k} > 2^{-k-1}$); dann ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \geq N$. Somit $|f_n(x)| = 0 \leq \varepsilon$. Wir schliessen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in (0,1)$.

Ein anderes Beispiel: Beachten Sie $f_n(x) = nI_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}(x)$.

6.4.

(a) Es ist klar, dass $\nu(E) \geq 0$ für alle $E \in \mathcal{A}$ und

$$\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int f I_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Seien (E_n) paarweise disjunkte Mengen in $\mathcal{A}$ und $f_n = f I_{\dot\bigcup_{k=1}^n E_k}$ für alle $n \geq 1$.

Dann sind $f_n \in \mathcal{E}_+^*$ und $f_n \nearrow f I_{\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} \in \mathcal{E}_+^*$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\nu\left(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \int_{\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} f d\mu \\
&= \int f I_{\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f I_{\dot\bigcup_{k=1}^n E_k} d\mu, \text{ mit Satz 2.9} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f \sum_{k=1}^n I_{E_k} d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int f I_{E_k} d\mu, \text{ mit Satz 2.4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu \\
&= \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n).
\end{aligned}$$

Also ist ν ein Mass.

(b) Sei $g \in \mathcal{E}_+$ d.h. $g = \sum_{k=1}^n a_k I_{A_k}$, $A_k \in \mathcal{A}$, $a_k \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int g d\nu &= \sum_{k=1}^n a_k \nu(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \int_{A_k} f d\mu \\
&= \sum_{k=1}^n a_k \int f I_{A_k} d\mu = \int f \sum_{k=1}^n a_k I_{A_k} d\mu = \int f g d\mu
\end{aligned}$$

Ist $g \in \mathcal{E}_+^*$, dann existieren $g_n \in \mathcal{E}_+$ mit $g_n \nearrow g$ und $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Somit ist klar, dass $\lim_{n\to\infty} fg_n = fg$ und $fg_n \nearrow fg$. Also erhalten wir dann,

$$\begin{aligned}\int g d\nu &= \lim_{n\to\infty} \int g_n d\nu, \quad \text{mit Satz 2.9 für } \nu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f g_n d\mu \\ &= \int fg d\mu, \ \text{ mit Satz 2.9 für } \mu.\end{aligned}$$

(c) $\nu(E) = \int\limits_E f d\mu = \int f I_E d\mu$ und $fI_E = 0$ μ-f.ü. wegen $\mu(E) = 0$. Mit Lemma 2.21 $fI_E = 0$ μ-fast, wir haben dass $\int fI_E d\mu = 0$, d.h. $\nu(E) = 0$.