7.1.

(a) Weil nach Voraussetzung $f_n \geq g$ μ-f.ü. gilt und f_n und g beide messbar sind, erhalten wir, dass die Menge

$$K_n := \{f_n < g\}$$

eine μ-Nullmenge ist. Wir betrachten die messbaren Funktionen

$$h_n(\omega) := I_{K_n^c}(\omega) f_n(\omega) + I_{K_n}(\omega) g(\omega)$$

und bemerken, dass für alle $\omega \in \Omega$

$$h_n(\omega) \geq g(\omega)$$

gilt. Nach Satz 3.2 erhalten wir deshalb

$$\int \liminf_n h_n \, d\mu \leq \liminf_n \int h_n \, d\mu \, .$$

Weil $\mu(K_n) = 0$ ist, können wir schreiben

$$\begin{aligned} \int h_n \, d\mu &= \int I_{K_n^c} f_n \, d\mu \\ &= \int (I_{K_n^c} f_n + I_{K_n} f_n) d\mu \\ &= \int f_n \, d\mu \end{aligned}$$

und erhalten somit

$$\int \liminf_n h_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu \, .$$

Wir betrachten die Menge $K := \bigcap K_n^c$ und bemerken, dass $\mu\left(K^c\right) = 0$ gilt. Falls ausserdem $\omega \in K$ ist, dann gilt $h_n(\omega) = f_n(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schliessen $\liminf_n h_n(\omega) = \liminf_n f_n(\omega)$ μ-f.ü. und

$$\int \liminf_n h_n \, d\mu = \int \liminf_n f_n \, d\mu \, .$$

Die Aussage folgt sofort.

(b) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_n(x) = -I_{(-\infty,-n)}(x) \, .$$

Offenbar gilt $f_n(x) \nearrow 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Andererseits gilt

$$\int f_n \, dx = -\infty$$

und daher kann die Formel

$$\int \left(\liminf_n f_n \right) d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu$$

nicht gelten.

`Anderes Beispiel`:

$f_n = -nI_{[0,1/2]} + nI_{(1/2,1]}$ hat $\liminf_n f_n = -\infty I_{[0,1/2]} + \infty I_{(1/2,1]}$ und $\int_0^1 f_n d\lambda = 0$.

7.2. Sei σ_n eine Zerlegung von $[a,b]$, so dass $x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$, wobei $0 \le k \le 2^n$. Dann gilt

$$M_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sup_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)$$

und

$$m_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \inf_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x).$$

Aus der Annahme haben wir, dass

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \inf_{n\in\mathbb{N}} M_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n.$$

Ausserdem bezeichnen wir

$$M_{nk} := \sup_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)$$

und

$$m_{nk} := \inf_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x).$$

Seien $\overline{f_n}(x) = M_{nk},\ x \in (x_k, x_{k+1}]$ und $\underline{f_n}(x) = m_{nk},\ x \in (x_k, x_{k+1}]$. Somit

$$\int_{[a,b]} \overline{f_n} d\lambda = M_n$$

und

$$\int_{[a,b]} \underline{f_n} d\lambda = m_n.$$

Es gilt $\underline{f_1} \le \underline{f_2} \le \cdots$, $\underline{f_1} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ und dann haben wir mit Satz 3.1, dass

$$\underline{f_n}(x) \to \underline{f}(x) \le f(x)$$

und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n = \lim_{n\to\infty} m_n = \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} \underline{f_n} d\lambda = \int_{[a,b]} \underline{f} d\lambda.$$

Ähnlich für $\overline{f_n}$
$$\overline{f_n}(x) \to \overline{f}(x) \geq f(x)$$
und
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} M_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \int_{[a,b]} \overline{f} d\lambda.$$
Wegen
$$\int_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f}) d\lambda = 0$$
und $\overline{f} - \underline{f} \geq 0$ folgt $\overline{f} = \underline{f}$ λ-fast überall. Weil $\overline{f}(x) \geq f(x) \geq \underline{f}(x)$, schliessen wir dass $f = \overline{f} = \underline{f}$ λ-fast überall. Somit ist f Lebesgue-messbar und
$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} \overline{f} d\lambda = \lim_{n\to\infty} M_n = \int_{[a,b]} f(x) dx.$$

7.3.

(a) Sei (t_n) eine Folge, so dass $t_n \to t_0 \in [a,b]$ und $h_n(x) = \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$. Wir haben
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$
Weil $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existiert, ist $f(x,\cdot)$ stetig für jedes $x \in X$. Somit existiert mit den Mittelwertsatz ein $\xi \in [t_0, t_n]$ mit
$$|h_n(x)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x).$$
Sei $F(t) = \int_X f(x,t) d\mu$. Mit Satz 3.4 haben wir
$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu.$$

(b)

1) f_n ist stetig für $x \in [0,1]$. Also ist f_n Lebesgue-messbar und beschränkt. Ist $x = 0$, so gilt $f_n(x) = 1$, und wenn $x \in (0,1]$, dann gilt $f_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Sei $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Somit $f_n(x) \to f(x)$ μ-fast überall.

   Ausserdem, $|f_n(x)| \leq 1 \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ $(1 + nx \leq (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n^2}{2}x + \cdots)$. Mit Satz 3.4
   $$\int_0^1 f_n d\lambda \to \int_0^1 f d\lambda = 0.$$

2) Sie müssen hier sehr vorsichtig sein ... f_n ist stetig für $x \in (0,1]$ und $f_n(0) = 0$. Also ist f_n Lebesgue-messbar. Für jedes n, ist f_n beschränkt auf $[0,1]$. Ist $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0$, und wenn $x \in (0,1]$, dann gilt $f_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Wir möchten g finden, so dass $|f_n(x)| \leq g(x) \in \overline{\mathcal{L}}^1(\lambda)$. Aber das ist nicht möglich für alle x. Wir berechnen

$$f_n'(x) = \frac{n^3x^2 + (n - n^3x^2)\log x + n}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Wir möchten eine kritische Punkte x_0 finden so dass $x_0 \in [0, 1/n]$. (Magic!)

Sei $g_n(x) = n^3x^2 + \log x(n - n^3x^2) + n$.

$$g_n'(x) = 2xn^3(1 - \log x) + \frac{n}{x}(1 - n^2x^2) > 0, \text{ für alle } x \in [0, 1/n].$$

Weil $g_n(0) = -\infty$ und $g_n(1/n) = 2n$, g_n aufsteigend, mit Zwischenwertsatz, existiert ein eindeutiges $x_0 \in [0, 1/n]$ mit $g_n(x_0) = 0$. Für $x_1 = \frac{1}{2n}$, $g_n(x_1) = \frac{5n}{4} - \frac{3n}{4}\log 2n$. Somit $g_n(x_1) < 0$ für alle n so dass $\log 2n > 5/4$. Damit

$$x_0 \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right].$$

Und dann hat f_n ein kritische Punkte: $x = x_0 \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$.

Für $x \in [0, x_0]$, $f_n' \leq 0$ ($g_n < 0$) ist und damit ist f_n absteigend. Sonst ist $f_n' \geq 0$ und f_n ist aufsteigend für $x \in [x_0, 1/n]$. Somit x_0 ist eine lokal Minimum für f_n.

Wir merken, dass für $x = 1/n$ $f_n(1/n) = -\log\sqrt{n}$ sehr schlecht ist.

IDEE: Betrachten Sie die Mengen $N_n = \{x > 1/n\}$ und N_n^c.

$f_n = f_n I_{N_n} + f_n I_{N_n^c}$.

Falls $x \in N_n$:

$$\left|\frac{nx\log x}{1 + n^2x^2}\right| = \frac{n(-x)\log x}{1 + n^2x^2} \leq \frac{-\log x}{1 + n^2x^2} \leq \frac{\log n}{1 + n^2x^2}.$$

Somit

$$0 \le \int |f_n| I_{N_n} d\lambda \le \int_{1/n}^{1} \frac{\log n}{1+n^2x^2} d\lambda \to 0.$$

Wir berechnen jetzt $\int f_n I_{N_n^c} d\lambda$. $x_0 \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ ist ein Minimum für $f_n I_{N_n^c}$, und dann,

$$|f_n| I_{N_n^c} \le \log n^{4/5}.$$

Somit

$$0 \le \int |f_n| I_{N_n^c} d\lambda \le \int_0^{1/n} \log n^{4/5} d\lambda = \frac{\log n^{4/5}}{n} \to 0$$

.

Wir schliessen, dass

$$\int_0^1 f_n d\lambda = \int f_n I_{N_n} d\lambda + \int f_n I_{N_n^c} d\lambda \to 0 + 0 = 0.$$

7.4.

(a) Offenbar ist $\phi_* \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Wir müssen zeigen, dass $\phi_*\mu$ ein Mass ist. Offenbar gilt

$$\phi_*\mu(\emptyset) = \mu(\phi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0\,.$$

Seien $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \phi_*\mathcal{A}$ paarweise disjunkt. Es gilt

$$\begin{aligned}\phi_*\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) &= \mu\left(\phi^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \phi^{-1}(B_i)\right)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(\phi^{-1}(B_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \phi_*\mu(B_i)\,,\end{aligned}$$

weil auch $\phi^{-1}(B_i)$ paarweise disjunkt sind.

(b) Sei $\mathcal{Y}' \subseteq 2^Y$ eine σ-Algebra, so dass φ $\mathcal{A}$-$\mathcal{Y}'$ messbar ist. Dann gilt für $B \in \mathcal{Y}'$

$$\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

und deshalb ist $B \in \phi_*\mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{Y}' \subseteq \phi_*\mathcal{A}$.

(c)

$$\begin{aligned} f : Y \to [-\infty, \infty] \text{ ist } \phi_* \mathcal{A}\text{-messbar} &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) : f^{-1}(U) \in \phi_* \mathcal{A} \\ &\Leftrightarrow \forall U \;\; \phi^{-1}(f^{-1}(U)) \in \mathcal{A} \\ &\Leftrightarrow \forall U \;\; (f \circ \phi)^{-1}(U) \in \mathcal{A} \\ &\Leftrightarrow f \circ \phi \;\; \mathcal{A}\text{-messbar.} \end{aligned}$$

(d) Sei $f(y) = I_B(y)$ mit $B \in \phi_* \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\phi(\omega))\, d\mu(\omega) &= \int_\Omega I_{\phi^{-1}(B)}(\omega)\, d\mu(\omega) = \mu(\phi^{-1}(B)) \\ &= \phi_* \mu(B) = \int_Y I_B(y)\, d\phi_* \mu(y) \\ &= \int_Y f(y)\, d\phi_* \mu(y)\,. \end{aligned}$$

Nach Linearität gilt die vorherige Formel auch, wenn f eine nicht negative Treppenfunktion ist.

Im allgemeinen Fall können wir eine Folge $(f_n)_n$ von Treppenfunktionen mit

$$0 \le f_n(y) \nearrow f(y), \quad \forall y \in Y$$

finden. Somit gilt $0 \le f_n(\phi(\omega)) \nearrow f(\phi(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$. Nach dem Satz von Beppo-Levi erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\phi(\omega))\, d\mu(\omega) &= \lim_n \int_\Omega f_n(\phi(\omega))\, d\mu(\omega) \\ &= \lim_n \int_Y f_n(y)\, d\phi_* \mu(y) \\ &= \int_Y f(y)\, d\phi_* \mu(y) \end{aligned}$$

und wir sind fertig.

(e) Wir bemerken, dass $f \circ \phi$ $\mathcal{A}$-messbar ist, weil ϕ $\mathcal{A} - \mathcal{Y}$-messbar ist. Ausserdem gilt für alle $B \in \mathcal{Y}$

$$\phi_* \mu(B) = \mu(\phi^{-1}(B))\,.$$

Wie in Punkt **d)** erhalten wir die Aussage.