8.1. (2)⇒(1) Sei $\varepsilon > 0$, $M = \sup_{\gamma\in\Lambda} \int G(|f_\gamma|)d\mu < \infty$ und $a := M/\varepsilon$. Wegen

$$G(t)/t \to \infty$$

gibt es ein $c > 0$ mit $G(t)/t \geq a$ für $t \geq c$.

Wir fixieren γ, $f := f_\gamma$. Sei $A_{\gamma,c} = \{|f| \geq c\}$. Dann ist $|f(x)| \leq (G \circ |f|)(x)/a$ für $x \in A_{\gamma,c}$ und damit

$$\int_{A_{\gamma,c}} |f|d\mu \leq \frac{1}{a}\int_{A_{\gamma,c}} G(|f|)d\mu \leq \frac{1}{a}M = \varepsilon$$

und

$$\sup_{\gamma\in\Lambda}\int_{A_{\gamma,c}} |f_\gamma|d\mu < \varepsilon.$$

Wir schliessen, dass

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{\gamma\in\Lambda}\int_{|f_\gamma|\geq c} |f_\gamma|d\mu = 0.$$

Mit Remark 3.1 ist also $(f_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ ist gleichmässig integrierbar.

(1)⇒(2)

Sei $G(t) = \int_0^t g(t)dt$.

Wir müssen eine wachsende Funktion g finden, so dass $g(t) \to \infty$, wenn $t \to \infty$.

Es genügt $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n I_{(n,n+1)}$ zu finden, wobei $g_0 = 0$. Sei $f = f_\gamma$ und

$$a_n(f) = \mu(\{|f| > n\}).$$

Somit

$$\int G(|f|)d\mu \leq g_1\mu(\{1 < |f| \leq 2\}) + (g_1 + g_2)\mu(\{2 < |f| \leq 3\}) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} g_n a_n(f).$$

Wir müssen also (g_n) finden, so dass gilt

$$\sup_{\gamma\in\Lambda}\sum_{n=1}^{\infty} g_n a_n(f_\gamma) < \infty$$

und $g_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Dieses impliziert, dass

$$G(t)/t \to \infty$$

und

$$\sup_{\gamma\in\Lambda}\int G(|f_\gamma|)d\mu < \infty.$$

Mit gleichmässig Intergrierbarkeit, wählen Sie $c_n \to \infty$ so, dass

$$\sup_{\gamma \in \Lambda} \int_{\{|f_\gamma| \geq c_n\}} |f_\gamma| d\mu \leq 2^{-n}.$$

Wir haben

$$\int_{\{|f| \geq c_n\}} |f| d\mu \geq \sum_{m=c_n}^{\infty} m\mu(\{m < |f| \leq m+1\}) = \sum_{m=c_n}^{\infty} \mu(\{|f| > m\}) = \sum_{m=c_n}^{\infty} a_m(f).$$

Indem wir das Supremum über $\gamma \in \Lambda$ nehmen, sehen wir dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=c_n}^{\infty} a_m(f_\gamma)$$

gleichmässig in γ beschränkt ist.

Durch Umordnen der Terme erhlaten wir $g_m = \#(\{n : c_n < m\})$, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=c_n}^{\infty} a_m(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{\{m \geq c_n\}} a_m(f) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{c_n \leq m\}} a_m(f) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \#(\{n : c_n < m\}) a_m(f) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} g_m a_m(f_\gamma).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\sup_{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} g_m a_m(f_\gamma) < \infty$$

und

$$\lim_{m \to \infty} g_m = \lim_{m \to \infty} \#(\{n : c_n < m\}) = \infty$$

wegen $c_n \to \infty$.

8.2.

(a) Zuerst bemerken wir, dass das Bild der Abbildung d in $[0, \infty)$ ist, da

$$0 \leq \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \leq \int d\mu < \infty$$

gilt.

Offenbar gilt $d(f,f) = 0$ und falls umgekehrt $d(f,g) = 0$ ist, dann schliessen wir $f = g$, weil in diesem Fall $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} = 0$ μ-f.ü. ist. Ferner gilt $d(f,g) = d(g,f)$, d.h. d ist symmetrisch.

Weil für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

gilt, erhalten wir für alle $f, g, h \in L^0(\mu)$ auch

$$d(f,g) = \int \frac{|f-h+h-g|}{1+|f-h+h-g|}\, d\mu \leq d(f,h) + d(g,h)\,.$$

Also ist d eine Metrik auf $L^0(\mu)$.

(b) Für $f_n, f \in L^0(\mu)$ und $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Menge $E_n(\varepsilon) \in \mathcal{A}$, definiert als

$$E_n(\varepsilon) := \{\omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \varepsilon\}\ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \int_{E_n(\varepsilon)} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n-f|}\, d\mu + \int_{E_n(\varepsilon)^c} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n-f|}\, d\mu \\ &\leq \mu(E_n(\varepsilon)) + \varepsilon\, \mu(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Falls $f_n \to f$ μ-stochastisch, dann gilt definitionsgemäss $\mu(E_n(\varepsilon)) \to 0$ für alle $\varepsilon > 0$, und daher erhalten wir

$$\limsup_n d(f_n, f) \leq \varepsilon\, \mu(\Omega)\,.$$

Weil ε beliebig war, erhalten wir schliesslich $\lim_n d(f_n, f) = 0$.

Wir bemerken, dass die Funktion $(-1, \infty) \ni t \mapsto t(1+t)^{-1}$ monoton wachsend ist. Deshalb gilt

$$d(f_n, f) \geq \int_{E_n(\varepsilon)} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n-f|}\, d\mu \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, \mu(E_n(\varepsilon))\,.$$

Falls jetzt $\lim_n d(f_n, f) = 0$ ist, dann erhalten wir, dass $\mu(E_n(\varepsilon)) \to 0$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt, d.h. $f_n \to f$ μ-stochastisch.

8.3. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in A \subseteq \Omega$, $\mu(A^c) = 0$. Nehmen Sie an, dass $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ existiert mit $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in A$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$E_{k,n} := \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in A\colon |f_m(x) - f(x)| \geq 2k^{-1}\}.$$

Ist $x \in E_{k,1}$, dann existiert $m \in \mathbb{N}$, so dass $|f_m(x) - f(x)| \geq 2k^{-1}$ und

$$2g(x) \geq |f_m(x)| + |f(x)| \geq 2k^{-1}.$$

Somit ist

$$k^{-1} I_{E_{k,1}} \leq g$$

und damit $k^{-1} I_{E_{k,1}} \in \mathcal{L}^1(\mu)$, also $\mu(E_{k,1}) < \infty$.

Bemerken Sie dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{k,n} \subseteq A \cap A^c = \emptyset,$$

d.h.

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_{k,n}) = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ wählen Sie $n_k \in \mathbb{N}$ so, dass $\mu(E_{k,n_k}) < 2^{-k}\varepsilon$. Sei $E_\varepsilon = (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{k,n_k}) \cup A^c$. Es ist klar dass $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$.

Sei $\delta > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $2k^{-1} < \delta$. Wir haben $|f_m(x) - f(x)| < 2k^{-1} < \delta$ für alle $x \in E_\varepsilon^c$ für $m \geq n_k$.

Wir schliessen, dass f_n in E_ε^c gleichmässig konvergent ist.

8.4.

(a) Falls f unbeschränkt von oben wäre, dann würde für alle Zerlegungen $U(\sigma) = \infty$ gelten. Daher ist $\sup_{x \in [a,b]} f(x) < \infty$. Analog muss $\inf_{x \in [a,b]} f(x) > -\infty$ sein. Also ist f beschränkt.

Wir definieren

$$u_n(x) = \sup\Big\{ f(y) : |x - y| < 2^{-n},\, y \in [a,b] \Big\} \geq u_{n+1}(x)$$

$$v_n(x) = \inf\Big\{ f(y) : |x - y| < 2^{-n},\, y \in [a,b] \Big\} \leq v_{n+1}(x)\,.$$

Weil u_n und v_n beziehungsweise unterhalbstetig und oberhalbstetig sind, folgt, dass sie auch messbar sind. Wir setzen

$$f^0(x) = \lim_n u_n(x), \quad f_0(x) = \lim_n v_n(x)\,,$$

die messbar und beschränkt sind und somit Lebesgue-integrierbar. Ausserdem gilt $f^0(x) \geq f_0(x)$ mit Gleichheit genau dann, wenn x ein Stetigkeitpunkt von f ist.

Für eine beliebige Zerlegung σ gilt

$$\sup\{f(y) : y \in [x_{i-1}, x_i]\} \geq f^0(x) \text{ für } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

und deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f^0 \, d\lambda = \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1},x_i]} f^0 \, d\lambda = \sum_{i=1}^n \int_{(x_{i-1},x_i)} f^0 \, d\lambda \\ \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup\{f(y) : y \in [x_{i-1}, x_i]\} = U(\sigma) \,.\end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, dass für eine beliebige Zerlegung σ'

$$\int_{[a,b]} f_0 \, dx \geq L(\sigma')$$

gilt.

Schliesslich erhalten wir für alle σ, σ'

$$U(\sigma) \geq \int_{[a,b]} f^0 \, dx \geq \int_{[a,b]} f_0 \, dx \geq L(\sigma')$$

und somit

$$\int_{[a,b]} f^0 \, dx = \int_{[a,b]} f_0 \, dx \,,$$

weil f grosszügig Riemann-integrierbar ist. Wegen $f^0 \geq f_0$ folgt $f^0 = f_0$ λ-fastüberall, d.h. f ist λ-fastüberall stetig.

(b) Es genügt u_n messbar bewiesen. Falls v_n ist ähnlich. Wir bewiessen dass $\{x \colon u_n(x) \leq a\}$ ist messbar für alle $a \in \mathbb{R}$. Wir fixieren $a \in \mathbb{R}$. Sei eine Folge $x_k \to x_0$ so dass $x_k \in \{x \colon u_n(x) \leq a\}$. Weil

$$\liminf_{x \to x_0} u_n(x) \geq u_n(x_0)$$

haben wir, dass

$$\sup_{k \geq 0} \inf_{m \geq k} u_n(x_m) \geq u_n(x_0).$$

Somit

$$a \geq \sup_{k \geq 0} \inf_{m \geq k} u_n(x_k) \geq u_n(x_0)$$

und dann $\{x \colon u_n(x) \leq a\} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine abgeloschene Menge. Aber $\mathbb{R} \setminus \{x \colon u_n(x) \leq a\}$ ist offen, und existiert $U_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ paarweise disjunkte Mengen so, dass

$$\mathbb{R} \setminus \{x \colon u_n(x) \leq a\} = \dot{\bigcup_i} U_i.$$

Damit es ist klar dass $\mathbb{R} \setminus \{x \colon u_n(x) \leq a\}$ messbar ist.

Wir schliessen dass $(\mathbb{R} \setminus \{x \colon u_n(x) \leq a\})^c \in \mathcal{A}^*$ d.h. $\{x \colon u_n(x) \leq a\} \in \mathcal{A}^*$.