9.1.

(a) Sei $r = p, q = \infty$, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Mit Satz 4.2 haben wir

$$||T(f)||_{L^p(\mu)} = ||fg||_p \leq ||f||_p||g||_\infty.$$

Wegen $f \in L^p(\mu)$, $||f||_p < \infty$ und $||g||_\infty < \infty$, gilt also

$$||T(f)||_p < \infty.$$

d.h. $T(f) \in L^p(\mu)$.

(b) Wir fixieren $\varepsilon \in (0, ||g||_\infty)$. Sei $c := ||g||_\infty - \varepsilon$ und $U := \{x \in \Omega \colon |g| > c\}$.

Fall $\mu(U) = \infty$.

Weil μ σ-semiendlich ist, existiert $E \subset U$ mit $0 < \mu(E) < \infty$. Sei $f = I_E$. Somit

$$||T(I_E)||_p = ||gI_E||_p \geq ||I_E||_p(||g||_\infty - \varepsilon).$$

Fall $\mu(U) < \infty$.

Falls $\mu(E) = 0$ für alle $E \subset U$, so gilt dass $\inf\{c > 0 : \mu(\{|g| > c\}) = 0\} < ||g||_\infty$. Widerspruch! Damit existiert $E \subset U$ mit $\mu(E) > 0$. Ähnlich zum Fall $\mu(U) = \infty$ haben wir

$$||T(I_E)||_p = ||gI_E||_p \geq ||I_E||_p(||g||_\infty - \varepsilon).$$

ε ist beliebige und damit

$$||T(I_E)||_p \geq ||I_E||_p||g||_\infty.$$

Aber

$$||T||_p = \sup_{0 \neq f \in L^p} \frac{||T(f)||_p}{||f||_p} \leq ||g||_\infty.$$

Wir schliessen dass

$$||T||_p = ||g||_\infty.$$

9.2.

(a) Sei $\Omega = [0, 1]$ und $f_n = nI_{[0,\frac{1}{n}]}$. Wir haben

$$\int f_n d\lambda = n\lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $f_n \in L^1$. Ausserdem

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \int f_n I_{\{|f_n|\geq c\}} d\lambda = \lim_{c\to\infty} \sup_n 1 = 1 \neq 0.$$

Wegen $\lambda(\Omega) < \infty$schliessen wir mit Bemerkung 3.14,dass f_n nicht gleichmässig intergrierbar ist.

(b) Sei $\Omega = [0,2]$ und

$$f_{nk} = \begin{cases} -n, \;\; x \in ((k-1)2^{-n}, k2^n] \\ n, \;\; x \in (1,2] \end{cases}$$

wobei $k = 1 \dots 2^n$. Sei $J_{nk} := ((k-1)2^{-n}, k2^n]$. Die dopple Folge ist:

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{31}, \dots$$

und

$$f_{nk}^- = nI_{J_{nk}}.$$

Schritte 1.

$$\int f_{nk}^- d\lambda = n2^{-n} \to 0$$

Somit

$$f_{nk}^- \to 0 \text{ in } L^1$$

Mit Satz 3.18 haben wir dass f_{nk}^- ist gleichmässig integrierbar.

Schritte 2.

$$\begin{aligned} \liminf_{nk\to\infty} \int f_{nk} d\lambda &= \liminf_{nk\to\infty} \int f_{nk}^+ - f_{nk}^- d\lambda \\ &= \liminf_{nk\to\infty} n - n2^{-n} d\lambda \\ &= \infty \end{aligned}$$

Schritte 3.

$\liminf_{nk\to\infty} f_{nk}^+ = \infty I_{(1,2]}$ und $\liminf_{nk\to\infty}(-f_{nk}^-) = -\limsup_{nk\to\infty} f_{nk}^- = -\infty I_{(0,1]}$. Somit

$$\int \liminf_{nk\to\infty} f_{nk}^+ - f_{nk}^- d\lambda = \infty - \infty.$$

Wir schliessen dass in Satz 3.21 wir brauchen

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\lambda < \infty$$

sonst,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\lambda$$

wohldefiniert nicht ist.

9.3.

(a) Zur Erinnerung:

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{c > 0 : \mu(\{|f| > c\}) = 0\right\} .$$

Fall 1 Falls $f \notin L^p(\mu)$ für ein $p < \infty$ ist, dann gilt $f \notin L^\infty(\mu)$ wegen $\mu(\Omega) < \infty$. Wir schliessen

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \infty = \|f\|_\infty .$$

Fall 2 O.B.d.A. können wir $f \in L^p(\mu), \forall p < \infty$ annehmen. Seien $A < \|f\|_\infty$ und E die Menge definiert als

$$E := \{\omega : |f(\omega)| > A\} .$$

Dann gilt nach Definition des Infimum

$$\mu(E) > 0 .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} A\,\mu(E)^{1/p} &\leq \left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \\ &\leq \mu(\Omega)^{1/p}\|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Wenn $p \to \infty$ geht, sehen wir, dass

$$A \leq \liminf_{p\to\infty} \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

und

$$\limsup_{p\to\infty} \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \|f\|_\infty$$

gilt.

Weil $A < \|f\|_\infty$ willkürlich sein kann, erhalten wir die gewünschte Aussage

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

(Man beachte, dass das alles auch gilt, wenn $\|f\|_\infty = \infty$ ist.)

(b) Weil Ω μ-σ-endlich ist, können wir eine Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, so dass

$$\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$$

mit $\mu(\Omega_n) < \infty$ gilt.

Wir betrachten die Funktion $f_n = f I_{\Omega_n}$, die in dem Raum $\mathcal{L}^0(\Omega_n, \mu)$ ist. Nach dem Punkt **a)** (mit Ω_n) erhalten wir somit für alle n

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_{\Omega_n} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|f_n\|_{\infty,n} := \|f_n\|_{L^\infty(\Omega_n,\mu)} .$$

Wir bemerken, dass $\|f_n\|_{\infty,n} \nearrow \|f\|_\infty$ gilt. Die linke Seite besitzt deshalb einen Limes für $n \to \infty$ und somit gilt

$$\lim_n \lim_{p\to\infty} \left(\int_{\Omega_n} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_\infty .$$

Offenbar ist der Limes unabhängig von der Zerlegung $(\Omega_n)_n$, die wir benutzt haben.

9.4.

$\Rightarrow$) Weil μ σ-endlich ist, können wir für alle $k \in \mathbb{N}$ disjunkte Mengen $\Omega_k \in \mathcal{A}$ mit $\mu(\Omega_k) < \infty$ und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k = \Omega$ finden.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ mit $\sum_{k=1}^\infty x_k < \infty$. Gegeben $1 \le q < \infty$ definieren wir g_q als

$$g_q := \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{x_k}{\mu(\Omega_k)} \right)^{1/q} I_{\Omega_k} .$$

Es ist klar, dass $g_q(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ ist. Ausserdem gilt für alle $K \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \left| \sum_{k=1}^K \left(\frac{x_k}{\mu(\Omega_k)} \right)^{1/q} I_{\Omega_k} \right|^q d\mu = \int_\Omega \sum_{k=1}^K \frac{x_k}{\mu(\Omega_k)} I_{\Omega_k} \, d\mu = \sum_{k=1}^K x_k ,$$

und deshalb erhalten wir nach dem Satz von Beppo Levi

$$\int_\Omega |g_q|^q \, d\mu = \sum_{k=1}^\infty x_k < \infty ,$$

d.h. $g_q \in L^q(\mu)$.

$\Leftarrow$) Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die Menge

$$E(\varepsilon) := \{\omega : |g_q(\omega)|^q > \varepsilon\} \in \mathcal{A}\,.$$

Nach der Markov-Ungleichung erhält man sofort

$$\varepsilon\, \mu(E(\varepsilon)) \leq \int_\Omega g_q^q \, d\mu < \infty\,,$$

weil nach Voraussetzung g_q positiv und in $L^q(\mu)$ ist. Deshalb sehen wir, dass

$$\mu(E(\varepsilon)) \leq \frac{\|g_q\|_q^q}{\varepsilon} < \infty\,.$$

Sei nun $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ mit $\varepsilon_n \searrow 0$ und $N := \{\omega : g_q(\omega) = 0\}$. Nach Voraussetzung ist $\mu(N) = 0$. Daher schliessen wir

$$\Omega = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E(\varepsilon_n)\right) \cup N\,,$$

d.h. μ ist σ-endlich.