

10.1.

- (a) Konstruieren Sie eine Familie $F = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von messbaren Funktionen, so dass $\sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ nicht messbar ist.
- (b) Finden Sie ein σ -endliches Mass ν und ein endliches Mass μ , so dass $\nu \ll \mu$, aber ν nicht totalstetig bezüglich μ ist.

10.2. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und \mathcal{A}_0 eine Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} . Zeigen Sie, dass zu jedem $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ eine \mathcal{A}_0 -messbare Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ existiert, so dass für alle $A \in \mathcal{A}_0$

$$\int_A f d\mu := \int I_A f d\mu = \int I_A g d\mu = \int_A g d\mu \text{ gilt.}$$

Bemerkung: In der Wahrscheinlichkeitstheorie nennt man g eine Version der bedingten Erwartung von f gegeben \mathcal{A}_0 .

10.3. Seien μ, ν σ -endliche Masse auf (Ω, \mathcal{A}) mit $\nu \ll \mu$, und $\lambda = \nu + \mu$. Zeigen Sie:

- (a) $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu d\lambda}{d\lambda d\mu}$ μ -f.ü.
- (b) Ist $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$, dann ist $0 \leq f < 1$ μ -f.ü.
- (c) $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}$.

10.4. Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Betrachten Sie die Menge $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ aller signierten Masse auf \mathcal{A} . Für $\nu \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ definieren wir

$$\|\nu\|_v := \nu^+(\Omega) + \nu^-(\Omega) \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_v$ eine Norm auf $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ definiert.

Hinweis: Setzen Sie $|\nu|(\cdot) := \nu^+(\cdot) + \nu^-(\cdot)$ und zeigen Sie zuerst, dass für jede Menge $E \in \mathcal{A}$

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \text{ disjunkt und } \bigcup_{j=1}^n E_j = E \right\}$$

gilt.

Abgabetermin:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, 06.05.2019.

Allgemeine Informationen sind unter:

<http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/>