11.1. Sind die folgenden Funktionale linear? Sind sie stetig? Falls ja, berechnen ihre Norm:

(a) $X = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ differenzierbar}\}$, $\|f\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $T : X \to \mathbb{R}$, wobei $T(f) := f'(0)$.

(b) $T : L^p \to \mathbb{R}$, $T(f) := \|f\|_{L^p}$.

(c) $\Omega = [0,1]$, $T : L^p \to L^p$, $T(f)(x) := xf(x)$.

11.2. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $p \in [1,\infty]$, q konjugiert zu p, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $g \in \overline{\mathcal{L}}^0$, so dass $\int gf d\mu$ wohldefiniert ist für alle $f \in \overline{\mathcal{L}}^p$ und

$$\left|\int gf d\mu\right| \leq C\|f\|_{L^p},$$

wobei C ist eine Konstant. Zeigen Sie, dass $g \in \overline{\mathcal{L}}^q$ und $\|g\|_{L^q} \leq C$

11.3. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $1 \leq p < r < q \leq \infty$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $L^p \cap L^q$ ist ein Banachraum mit Norm $\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_q$.

(b) $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_q^{1-\lambda}$, wobei $\lambda \in (0,1)$ d.h. $L^p \cap L^q \subset L^r$.

(c) Die Inklusionabbildung $\iota\colon L^p \cap L^q \to L^r$, $f \mapsto \iota(f) := f$, ist stetig.

11.4. Sei $\Omega = \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ mit den Koordinatenabbildungen $X_u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $u \geq 0$. Sei $\mathcal{F} = \sigma(X_u; u \geq 0)$, und für jedes $t \geq 0$ sei $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$. Zeigen Sie, dass $Y := \inf_{r\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} X_r$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist, und dass $Z := \sup_{r\in[0,t]} X_r$ nicht $\mathcal{F}_t$-messbar ist.

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, 13.05.2019.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/`