12.1.

(a) Zeigen Sie $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ ein Massraum mit $\mu_1(\Omega_1) < \infty$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ein messbarer Raum. Sei K ein Übergangskern von Ω_1 nach $\mathcal{A}_2$. Betrachten Sie die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ auf $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Sei schliesslich

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \omega_1 \mapsto K(\omega_1, A_{\omega_1}) \text{ ist } \mathcal{A}_1 - \text{messbar}\} \,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist.

12.2. Betrachten Sie mit $I := [0,1]$ die Räume $(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ und $(I^3, \mathcal{B}(I^3), \lambda^3)$. Sei $f : I^3 \to [0, \infty]$ definiert als

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|y-z|}} & \text{falls } y \neq z\,, \\ \infty & \text{falls } y = z\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

a) $f \in L^1(\lambda^3)$ ist;

b) für jedes $z \in I$ die Menge

$$Y(z) := \left\{ y \in I : \int f(x,y,z)\, dx = \infty \right\}$$

nicht leer und abhängig von z ist.

12.3. Wie in der Vorlesung sei $\Omega = \prod_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$, $\mathcal{A} = \prod_{\lambda \in \Lambda}$ und $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}$ die Kollektion der (messbaren) Zylindermengen mit endlicher Basis.

(a) Sei $\emptyset \neq I \subseteq \Lambda$. Zeigen Sie, dass $X_I \colon \Omega \to \Omega_I$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_I$-messbar ist.

(b) Sei $\mathcal{J} = \{\emptyset \neq J \subseteq \Lambda \colon J \text{ endlich}\}$. Seien μ_J, $J \in \mathcal{J}$, Masse auf $\mathcal{A}_J$, die die Konsistenz bedingung (3.1) oder (3.2) erfüllen und

$$\mu(Z) := \mu_J(B) \text{ für } Z \in \mathcal{Z} \text{ mit } Z = X_J^{-1}(B) \text{ für } J \in \mathcal{J}, B \in \mathcal{A}_J.$$

Zeigen Sie, dass μ ein Inhalt auf $\mathcal{Z}$ ist, also wohldefiniert und endlich additiv.

(c) Seien $f_\lambda \colon \Omega_\lambda \to \mathbb{R}$ A_λ-messbare Abbildungen, $\lambda \in \Lambda$, und $\mathcal{G} := \sigma(f_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, für die alle f_λ messbar sind. Zeigen Sie:

$$\mathcal{G} = \bigcup_{I \subseteq \Lambda,\, I \text{ abzählbar}} \sigma(f_i; i \in I).$$

12.4. Seien $\Omega_1 = \Omega_2 = [0,1]$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}([0,1])$, und $\mu_1 = \lambda$, $\mu_2 = \nu$ (ν ist das Zählmass). Für $E \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, definieren wir

$$(\lambda \times \nu)^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)\nu(B_n) \colon \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n \supseteq E, \text{ wobei } A_n, B_n \in \mathcal{B}([0,1]) \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $(\lambda \times \nu)^*$ ist ein äusseres Mass.

(b) Sei $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Dann $(\lambda \times \nu)^*(A_1 \times A_2) = \lambda(A_1)\nu(A_2)$.

(c) Mit dem Masserweiterungssatz von Carathéodory sei $\lambda \times \nu$ eine Erweiterung von $(\lambda \times \nu)^*$. Dann gilt

$$\int \int I_D d\lambda d\nu \neq \int \int I_D d\nu d\lambda \neq \int I_D d(\lambda \times \nu),$$

wobei $D = \{(x,x) \colon x \in [0,1]\} \subset [0,1]^2$.

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, 20.05.2017.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/`