13.1. Beweisen Sie die folgende Gleichung

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Fubini und die Identität

$$\int_0^t e^{-ux}\sin x\,dx = \frac{1}{1+u^2}\Big[1-e^{-ut}(u\sin t+\cos t)\Big]\,,\quad u>0\,.$$

13.2. Sei $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und $T: L^q(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, so dass

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy \text{ für alle } f \in L^q(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass $\|T\| < \infty$, wenn $K(x,y) \in L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \lambda(dx)\times\lambda(dy))$.

13.3.

(a) Sei $\mathcal{F}$ ein Stone-Vektorverband und $J\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

Ist J eine Linearform und positiv, so ist J monoton.

(b) Sei $\Lambda \neq \emptyset$ und seien $(\Omega_\lambda, \mathcal{A}_\lambda, \mu_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ σ-endliche Massräume. Für $J \subseteq \Lambda$ endlich sei $\Omega_J := \prod_{j\in J}\Omega_j$, $\mathcal{A}_J := \prod_{j\in J}\mathcal{A}_j$ und μ_J das entsprechende Produktmass auf $\mathcal{A}_J$. Zeigen Sie:

Falls die Familie aller μ_J konsistent ist, so sind alle μ_λ Wahrscheinlichkeitsmasse.

13.4. Wie im Satz von Daniell-Stone sei $\mathcal{F}$ ein Stone-Vektorverband auf $\Omega \neq \emptyset$ und J eine σ-stetige positive Linearform auf $\mathcal{F}$. Ferner sei $\mathcal{F}_+^*$ die Menge aller $f:\Omega\to[0,\infty]$ mit $f_n \nearrow f$ für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}_+$ und $J^*: \mathcal{F}_+^* \to [0,\infty]$ definiert durch $J^*(f) := \sup_{n\in\mathbb{N}} J(f_n)$. Zeigen Sie: Ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}_+^*$ mit $h_n \nearrow h \in \mathcal{F}_+^*$, so gilt

$$J^*(h_n) \nearrow J^*(h)\,.$$

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, 27.05.2019.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/`