

14.1. Sei $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ ein Ring und m ein Inhalt auf \mathcal{R} . Seien $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{R}$ mit $m(E_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Für $1 \leq p \leq n$ und $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ setzen Sie

$$\sigma_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} m(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_p}).$$

Zeigen Sie die Inklusions-Exklusions-Formel

$$m(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \sigma_p.$$

14.2.

Sei Ω eine überabzählbare Menge,

$$\mathcal{B} := \{E \subseteq \Omega : E \text{ abzählbar oder } E^c \text{ abzählbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{B} eine σ -Algebra ist und dass $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{falls } E \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmass auf \mathcal{B} ist.

14.3. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ messbar mit $\int_\Omega f d\mu < \infty$. Zeigen Sie, dass Mengen $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$, mit $\mu(A_n) < \infty$ existieren, so dass für alle $x \in \Omega$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n I_{A_n}(x)$$

gilt.

14.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $U \subseteq X$. Dann setzen wir

$$\text{diam}(U) := \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$$

und

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^d : \text{diam}(U_i) < \delta, \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset A \right\},$$

wobei $A \subseteq X$. Wir definieren das **Hausdorff-Mass**

$$\mathcal{H}^d(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^d(A).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) \mathcal{H}^d ist ein äusseres Mass und \mathcal{H}_δ^d ist monoton in δ .
- (b) Falls $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, dann $\mathcal{H}^t(A) = 0$, $0 \leq s < t \leq \infty$.
- (c) Falls $\mathcal{H}^t(A) > 0$, dann $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$, $0 \leq s < t \leq \infty$.

Bemerkung: Dies impliziert, dass es einen eindeutigen Wert $d \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für $s > d$ und $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ für $s < d$. Dieser Wert d wird auch die **Hausdorff-Dimension** von A genannt.

14.5. Betrachten Sie $\Omega := \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ mit der Metrik $d : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ definiert als

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{falls } x_1 = x_2, \\ 1 + |y_1 - y_2| & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass (Ω, d) lokalkompakt und σ -kompakt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass zu jeder Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ eine endliche Menge $S_f \subseteq \mathbb{Z}$ mit $\text{supp} f \subseteq S_f \times \mathbb{R}$ existiert.
- (c) Sei $J : \mathcal{K}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$Jf := \sum_{x \in S_f} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy).$$

Sei μ das Borelmass auf (Ω, d) , so dass

$$Jf = \int f d\mu, \quad f \in \mathcal{K}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass jede einpunktige Teilmenge von Ω μ -Mass 0 hat.

Abgabetermin:

Keine.

Allgemeine Informationen sind unter:

<http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/>