2.1. Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Massen auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$. Seien ferner $\lambda_n \in [0,\infty), n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n$ ein Mass ist.

2.2. Seien $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ ein endliches Mass. Für eine beliebige Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^\Omega$ definieren wir

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

und

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \,.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$.

(b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n) \leq \limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n)\,.$$

(c) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, dann gilt $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.
(Dieses Resultat heisst in der Wahrscheinlichkeitstheorie das erste Lemma von Borel–Cantelli.)

2.3. Seien $\mathcal{A} = \sigma(\{\text{alle endlichen Vereinigungen von } (a,b] \text{ mit } a \leq b \text{ und } a,b \in \mathbb{R}\})$ für $\Omega = \mathbb{R}$, und μ erfülle $\lim_{z\to-\infty} \mu((z,0]) < \infty$ und $\mu((x,y]) < \infty$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F von μ, definiert als

$$F(x) := \mu((-\infty,x])\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte besitzen kann, und dass F genau dann in $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist, wenn $\mu(\{x_0\}) > 0$ gilt.

2.4. Seien $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Mass. Dann heisst μ σ-semiendlich, wenn aus $\mu(E) = \infty$, $E \in \mathcal{A}$ folgt, dass $F \in \mathcal{A}$ existiert mit $F \subset E$ und $0 < \mu(F) < \infty$.

Jetzt sei μ ein Mass, und $\mu_0 = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, \mu(F) < \infty\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) μ_0 ist σ-semiendlich.

(b) Ist μ σ-semiendlich, dann gilt $\mu = \mu_0$.
Tipp Zeigen Sie: μ ein σ-semiendliches Mass und $\mu(E) = \infty$, dann existiert für alle $C > 0$ ein $F \subset E$ mit $C < \mu(F) < \infty$.

(c) Es gibt ein Mass ν mit

$$\mu = \mu_0 + \nu$$

wobei $\nu : \mathcal{A} \to \{0, \infty\}$.

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Dienstag, 04.03.2019.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/`