

5.1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$A := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $f(A)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

5.2.

- (a) Seien $F \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge und $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein stetiges $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in F$.

Hinweis: Jede offene Menge in \mathbb{R} lässt sich als abzählbare disjunkte Vereinigung von paarweise disjunkten Intervallen schreiben.

- (b) Finden Sie eine stetige monotone Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, so dass $|f'(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0, 1] \setminus A$, $\lambda(A) = 0$, aber f nicht eine Lipschitz-Funktion ist.

5.3. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\lambda\{x \in D : f(x) > \alpha\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda\{x \in D : f_n(x) > \alpha\}$
(b) $\lambda\{x \in D : f(x) < \alpha\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda\{x \in D : f_n(x) \leq \alpha\}$
(c) Gilt (a) immer noch, wenn wir beide $>$ durch \geq ersetzen?

5.4. Seien μ ein Borelmaß auf \mathbb{R}^n (d.h. ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$) und $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Die Funktion $F : G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genüge der Carathéodory-Bedingung, d.h.

- i) $F(\cdot, u) : G \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar für alle $u \in \mathbb{R}$,
ii) $F(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig für μ -fast alle $x \in G$, d.h.

$$\{x \in G : u \mapsto F(x, u) \text{ ist nicht stetig}\} \subseteq N$$

für eine Menge $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(N) = 0$.

Sei weiter $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass

$$f(x) := F(x, u(x))$$

μ -fast messbar ist, d.h. es gibt eine Borel-messbare Funktion \tilde{f} mit $\{f \neq \tilde{f}\} \subseteq \tilde{N}$ für ein $\tilde{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(\tilde{N}) = 0$. (Insbesondere: Falls μ vollständig ist, so ist $\{f \neq \tilde{f}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und damit f Borel-messbar.)

Abgabetermin:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, 25.03.2019.

Allgemeine Informationen sind unter:

<http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/>