

6.1. Sei $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $f \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$ und

$$\left| \int f d\mu \right| = \int |f| d\mu.$$

Dann ist μ -fast überall auf Ω entweder $f \geq 0$ oder $f \leq 0$.

6.2.

(a) Beweisen Sie Lemma 2.13.

Für $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar sind äquivalent:

- 1) $f \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$.
- 2) $f^+, f^- \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$.
- 3) $|f| \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$.
- 4) $\exists h_1, h_2 \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$ mit $f^+ \leq h_1, f^- \leq h_2$.
- 5) $\exists g \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$ mit $|f| \leq g$.

(b) Sei (Ω, \mathcal{A}) ein beliebiger messbarer Raum, $x \in \Omega$ und $\mu = \delta_x$ das Diracmass in x . Zeigen Sie:

$$\bar{\mathcal{L}}^1(\delta_x) = \{f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty] : f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } |f(x)| < \infty\}$$

und

$$\int f d\delta_x = f(x)$$

für $f \in \bar{\mathcal{L}}^1(\delta_x)$.

6.3.

(a) Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass der Satz über monotone Konvergenz mit dem Riemann-Integral nicht gilt.

(b) Geben Sie ein Beispiel für beschränkte messbare Funktionen $f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\int_{(0,1)} f_n(x) d\lambda = 1, \quad n \geq 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \text{für alle } x \in (0, 1).$$

6.4. Seien $f \in \mathcal{E}_+^*$ und $\nu(E) = \int_E f d\mu$, $E \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) ν ist ein Mass.
- (b) Für alle $g \in \mathcal{E}_+^*$ gilt $\int g d\nu = \int fg d\mu$.
- (c) Für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) = 0$ gilt $\nu(E) = 0$ (d.h. ν ist absolutstetig bezüglich μ).

Abgabetermin:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, 01.04.2019.

Allgemeine Informationen sind unter:

<http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/>