

7.1. Seien $f_n : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar.

(a) Zeigen Sie: Gilt $f_n \geq g$ μ -f.ü. für jedes n mit $g \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$, so folgt

$$\int \left(\liminf_n f_n \right) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu. \quad (1)$$

(b) Zeigen Sie: Ohne die zusätzliche Voraussetzung ist (1) im Allgemeinen falsch.

7.2. Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Zerlegung σ von $[a, b]$ ist eine endliche Folge $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Wir definieren

$$M(\sigma) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup \{f(y) : y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

und

$$m(\sigma) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf \{f(y) : y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

und sagen, dass f Riemann-integrierbar ist, falls

$$\infty > \inf_{\sigma} M(\sigma) = \sup_{\sigma} m(\sigma) > -\infty$$

gilt. Sei λ das Lebesguemass auf $[a, b]$. Zeigen Sie: Falls f Riemann-integrierbar ist, so ist f Lebesgue-messbar und

$$\inf_{\sigma} M(\sigma) = \sup_{\sigma} m(\sigma) =: \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

7.3.

(a) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Massraum und $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$ eine Funktion mit und $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $t \in [a, b]$. Nehmen Sie an, dass $\frac{\partial f}{\partial t}$ existiert und $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$ für alle x und t , wobei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu = \frac{\partial}{\partial t} \int_X f(x, t) d\mu.$$

(b) Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n d\lambda$ für

$$1) f_n(x) = \frac{1 + nx}{(1 + x)^n},$$

$$2) f_n(x) = \frac{nx \log x}{1 + n^2 x^2}.$$

7.4. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, Y eine Menge und $\phi : \Omega \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir definieren den *Pushforward von \mathcal{A}* als die σ -Algebra

$$\phi_*\mathcal{A} := \{B \subseteq Y : \phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \subseteq 2^Y$$

und den *Pushforward von μ* als die Abbildung $\phi_*\mu : \phi_*\mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, so dass

$$\phi_*\mu(B) := \mu(\phi^{-1}(B)).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $(Y, \phi_*\mathcal{A}, \phi_*\mu)$ ein Massraum ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\phi_*\mathcal{A}$ die grösste σ -Algebra \mathcal{Y} auf Y ist, für die ϕ \mathcal{A} - \mathcal{Y} -messbar ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $f : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ $\phi_*\mathcal{A}$ -messbar ist genau dann, wenn $f \circ \phi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbar ist.
- (d) Sei $f : Y \rightarrow [0, \infty]$ $\phi_*\mathcal{A}$ -messbar. Zeigen Sie die Transformationsformel

$$\int_{\Omega} f(\phi(\omega)) d\mu(\omega) = \int_Y f(y) d\phi_*\mu(y). \quad (2)$$

- (e) Zeigen Sie, dass (2) auch dann gilt, wenn $\mathcal{Y} \subseteq 2^Y$ eine σ -Algebra auf Y , ϕ \mathcal{A} - \mathcal{Y} -messbar und f \mathcal{Y} -messbar ist.

Abgabetermin:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, 08.04.2019.

Allgemeine Informationen sind unter:

<http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/>