8.1. (Satz von La Vallée Poussin) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(\Omega) < \infty$, $\Lambda \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und $(f_\gamma)_{\gamma\in\Lambda} \subseteq \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalenten sind:

(1) $(f_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ ist gleichmässig integrierbar.

(2) Es existiert eine wachsende und konvexe Funktion $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(t)}{t} = +\infty$$

und

$$\sup_{\gamma\in\Lambda} \int G(|f_\gamma|) d\mu < \infty.$$

Bemerkung:

In der Wahrscheinlichkeittheorie heisst eine Familie von Zufallsvariablen $(X_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gleichmässig integrierbar, falls

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\gamma\in\Lambda} E[|X_\gamma| I_{\{|X_\gamma|\geq c\}}] = 0.$$

Dann zeigt der obige Satz, dass das äquivalent ist zur Existenz einer wachsenden konvexen Funktion $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$$

und

$$\sup_{\gamma\in\Lambda} E[G(|X_\gamma|)] < \infty.$$

Hinreichend für gleichmässige Integrierbarkeit ist also $z.B.$ Beschränktkeit in L^p für ein $p > 1$, d.h. $\sup_{\gamma\in\Lambda} E[|X_\gamma|^p] < \infty$.

8.2. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $L^0(\mu)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Abbildung

$$d : L^0(\mu) \times L^0(\mu) \to \mathbb{R}\,,$$

$$(f, g) \mapsto \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu\,.$$

Zeigen Sie:

(a) d ist eine Metrik auf $L^0(\mu)$.

(b) $f_n \to f$ μ-stochastisch $\iff \lim_n d(f_n, f) = 0$.

8.3. Zeigen Sie die folgende Variante des Satzes von Egorov: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen mit $f_n \to f$ μ-f.ü. für eine messbare Funktion und $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle n, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ und so, dass (f_n) auf E_ε^c gleichmässig gegen f konvergiert. (Die Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ ist hier also nicht nötig.)

8.4. Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine *Zerlegung* σ von $[a, b]$ ist eine endliche Folge $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Wir definieren

$$U(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup \{f(y) : y \in (x_{i-1}, x_i]\}$$

und

$$L(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf \{f(y) : y \in (x_{i-1}, x_i]\}$$

und sagen, dass f grosszügig Riemann-integrierbar ist, falls

$$\infty > \inf_\sigma U(\sigma) = \sup_\sigma L(\sigma) > -\infty$$

gilt.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Hinweises (H), dass eine grosszügig Riemann-integrierbare Funktion f auf $(a, b]$ beschränkt und λ-fastüberall stetig ist.

(b) Beweisen Sie auch den Hinweis (H) (**fakultativ**).

`Hinweis:`

i) Betrachten Sie die Funktionen

$$u_n(x) = \sup \left\{f(y) : |x - y| < 2^{-n},\, y \in [a, b]\right\}$$

$$v_n(x) = \inf \left\{f(y) : |x - y| < 2^{-n},\, y \in [a, b]\right\} .$$

Sie sind beziehungsweise unterhalbstetig und oberhalbstetig, d.h. für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\liminf_{x\to x_0} u_n(x) \geq u_n(x_0)$$

und

$$\limsup_{x\to x_0} v_n(x) \leq v_n(x_0) .$$

(H) Die Funktionen u_n und v_n sind messbar.

ii) Betrachten Sie

$$f^0(x) = \lim_n u_n(x), \quad f_0(x) = \lim_n v_n(x) \,.$$

Dann gilt $f^0(x) \geq f_0(x)$ mit Gleichheit genau dann, wenn x ein Stetigkeitpunkt von f ist.

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, 15.04.2019.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-2284-00L/`