Probeprüfung

Aufgabe 1 (16 Punkte)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Jedes richtig gesetzte Kreuz gibt +1 Punkt, jedes falsch gesetze $-\frac{1}{2}$ Punkt, unbeantwortete Aufgaben 0 Punkte. Insgesamt können bei dieser Aufgabe keine negativen Punktzahlen erreicht werden. (Es können ggf. mehrere Aussagen oder keine Aussage einer Teilaufgabe wahr sein.)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $D_{2n} = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = \mathbb{1} \rangle$ die Diedergruppe.

☐W ☐F $C_2 \subset D_{2n}$ ist eine normale Untergruppe.

☐W ☐F Sei V eine endlich dimensionale irreduzible komplexe Darstellungen von D_{2n}. Dann ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{D_{2n}}(V, V) = 1$.

☐W ☐F Sei V eine endlich dimensionale komplexe Darstellung von D_{2n}. Dann gibt es bis auf Skalierung ein eindeutiges Skalarprodukt bezüglich dem die Darstellung unitär ist.

b) Sei $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ das Matrixexponential, $[-, -]$ der Kommutator und $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$.

☐W ☐F Für alle $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ gilt
$\exp(X) Y \exp(-X) = \exp(\mathrm{ad}_X) Y$.

☐W ☐F Für alle $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ mit $[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0$ gilt
$\exp(X) \exp(Y) = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y])$.

c) Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie Algebra mit Killing Form

$$K = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

in einer geeigneten Basis.

☐W ☐F Dann ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach und nicht abelsch.

☐W ☐F Dann ist $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

☐W ☐F Dann ist $\{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g} : K(x, y) = 0\} \subset \mathfrak{g}$ ist ein Lie Algebra ideal.

d) Betrachte die (definierende) Darstellung ρ von $\mathrm{SO}(3)$ auf $V = \mathbb{R}^3$. Sei $\rho_3 := \rho \otimes \rho \otimes \rho$ die entsprechende Darstellung auf $V_3 := V \otimes V \otimes V$. Sei

$$C = \rho_3(L_1)^2 + \rho_3(L_2)^2 + \rho_3(L_3)^2 \in \mathrm{Hom}(V_3, V_3).$$

☐W ☐F Der Operator C ist $\mathrm{SO}(3)$-äquivariant, also $C \circ \rho_3(R) = \rho_3(R) \circ C$.

☐W ☐F Es gilt $C = 8 Id_{V_3}$.

☐W ☐F ρ_3 zerfällt in genau 4 isotypische Komponenten.

e) ☐W ☐F Die zum Young-Diagramm

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}$$

gehörige irreduzible Darstellung V_λ von S_{10} ist 216-dimensional.

f) ☐W ☐F Die bis auf isomorphie einzigen 3 dimensionalen komplexe Lie Algebren sind die abelsche 3 dimensionale Lie Algebra und $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

☐W ☐F Jede irreduzible Darstellung einer abelschen komplexen Lie Algebra ist eindimensional.

☐W ☐F Sei $\mathfrak{g}$ der komplexe Vektorraum mit Basis X, Y, Z und $[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ die antisymmetrische bilineare Abbildung gegeben durch

$$[X, Y] = Y \qquad [X, Z] = Y \qquad [Y, Z] = X$$

Dann ist $\mathfrak{g}$ mit $[-,-]$ eine Lie Algebra.

☐W ☐F Sei $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$ eine Lie Algebra Darstellung und $v \in \mathbb{C}^n$ mit $v \neq 0$. Dann ist $\{\rho(x)v \in \mathbb{C}^n \mid x \in \mathfrak{g}\}$ ein irreduzibler Unterraum.

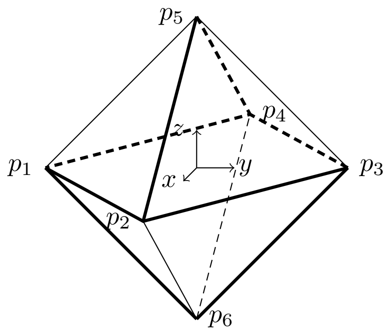
Aufgabe 2 (5+5+6=16 Punkte)**.** Betrachte die folgenden 6 Punkte in $\mathbb{R}^3$

$$p_1 = (0,-1,0) \qquad p_2 = (1,0,0) \qquad p_3 = (0,1,0)$$
$$p_4 = (-1,0,0) \qquad p_5 = (0,0,1) \qquad p_6 = (0,0,-1)$$

die ein Oktaeder Aufspannen (siehe Bild). Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung der Verbindungslinien von

p_1 mit p_2; p_2 mit p_3; p_3 mit p_4; p_5 mit p_2; p_5 mit p_4; p_6 mit p_1; p_6 mit p_3

(im Bild mit dicken Linien gekennzeichnet). Die Symmetriegruppe von K ist die Untergruppe der Euklidischen Gruppe $E(3)$ die K auf sich selbst abbildet.



a) Bestimme die Symmetriegruppe von K als Untergruppe $G \subset E(3)$.
Gebe G als Liste von Elementen $\tau_{xy}^a R^b \tau_{xz}^c$ an mit $a, b, c \in \mathbb{N}_0$; τ_{xy} der Spiegelung an der xy-Ebene; τ_{xz} der Spiegelung an der xz-Ebene; R der Drehung um die z-Achse mit $90°$.

b) Bestimme einen Isomorphismus $D_4 \to G$ wobei $D_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 \rangle$ die Diedergruppe ist.

c) Betrachte das mechanische System bestehend aus 6 gleichen Massenpunkten auf den Punkten $p_1, \dots, p_6$, verbunden durch Federn entlang den Kanten des Oktaeders, mit Federkonstante F entlang K und $f \neq F$ sonst. Bestimme die maximale Anzahl verschiedener Eigenfrequenzen aufgrund der Symmetriegruppe $G \simeq D_4$. Berechne dazu den Charakter der gegebenen Darstellung von D_4 auf $\mathbb{C}^{18}$ und ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten.
Hinweis: Die Charaktertafel von D_4 ist

	$[1]$	$[\sigma^2]$	$2[\sigma]$	$2[\tau]$	$2[\tau\sigma]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

und darf ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 3 (8+8=16 Punkte)**.** Sei $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ eine Basis der reellen Lie Algebra $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ sodass

$$[X_i, X_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} X_k \qquad [Y_i, Y_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} Y_k \qquad [X_i, Y_j] = 0$$

wobei ϵ_{ijk} das Levi Civita Symbol ist.

a) Zeige, dass $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{so}(4)$ als reelle Lie Algebren.

b) Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} \rho_{mn} :\ \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) &\to \mathrm{End}(V_m \otimes V_n) \\ x \oplus y &\mapsto \rho_m(x) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho_n(y) \end{aligned}$$

wobei $\rho_m : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{End}(V_m)$ die eindeutige $m+1$ dimensionale komplexe irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{so}(3)$ ist. Zeige, dass $m = n$ genau dann wenn

$$\sum_{i=1}^{3} \rho_{mn}(X_i + Y_i) \rho_{mn}(X_i - Y_i) = 0$$

Aufgabe 4 (6+3+6=16 Punkte)**.** Wir betrachten eine Darstellung $\rho : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V)$ von $\mathrm{SU}(2)$ auf $V = \mathbb{C}^7$, so dass

$$\mathrm{tr}\, \rho \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = 2\cos(3t) + 4\cos(t) + 1.$$

a) Bestimmen Sie die Zerlegung von V in irreduzible Komponenten.

b) Geben Sie explizit eine mögliche Form der zugehörigen Darstellung von $\mathfrak{su}(2)$ an, in einer Basis Ihrer Wahl.

c) Betrachten Sie den Raum der symmetrischen $SU(2)$-invarianten Bilinearformen auf V, das heisst

$$\begin{aligned} U := \{B : V \otimes V \to \mathbb{C} \mid{}& \text{linear}; \\ & B(u,v) = B(v,u)\ \forall u, v \in V; \\ & B(\rho(A)u, \rho(A)v) = B(u,v)\ \forall u, v \in V,\ \forall A \in \mathrm{SU}(2)\}\,. \end{aligned}$$

Was ist die Dimension von U?

Eine Begründung ist für alle Teilaufgaben erforderlich.

Aufgabe 5 (5+6+5=16 Punkte)**.** Betrachte die alternierende Gruppe

$$A_4 = \{\sigma \in S_4 \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$$

a) Bestimme die Konjugationsklassen von A_4 in Zykelnotation.
Hinweis: Die Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe S_4 sind

$$[e] \qquad [(12)] \qquad [(123)] \qquad [(12)(34)] \qquad [(1234)]$$

und dürfen ohne Beweis verwendet werden.

b) Bestimme eine 3 dimensionale irreduzible Darstellung von A_4 und berechne deren Charakter.
Hinweis: Die Irreduzibilität ist aus dem Charakter ablesbar.

c) Bestimme die Charaktertafel von A_4.