Aufgabe 1.

a) Sei G eine Gruppe. Sei $g \in G$ und sei $a \in G$ eine Linksinverse ($ag = \mathbb{1}$) oder eine Rechtsinverse ($ga = \mathbb{1}$) von g. Dann ist $a = g^{-1}$.

b) Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = \mathbb{1}\}$ ein Normalteiler von G und $\operatorname{im} f = \{f(g) \mid g \in G\}$ eine Untergruppe von G'. Zeige, dass

$$\operatorname{im} f \simeq G/\ker f,$$

also dass $\operatorname{im} f$ und $G/\ker f$ isomorphe Gruppen sind.

Aufgabe 2. Bestimme jeweils die Symmetriegruppe der folgenden Objekte, d.h. die Grupper aller das Objekt auch sich selbst abbildender Isometrien. Bestimme (falls endlich) die Ordnung der Gruppe.

a) Ein reguläres Sechseck im $\mathbb{R}^2$.

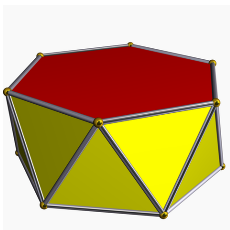
b) Ein reguläres Sechseck im $\mathbb{R}^3$ (eingebettet in der xy-Ebene).

c) Ein Torus im $\mathbb{R}^3$.

d) Ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ mit ungleichen Seitenlängen.

e) Ein Fischgratparkett (s. Boden in den Seminarräumen im G-Stock.)

f) Dieses Gebilde (Antiprisma)



g) Ein Volleyball.

Hinweis: Insbesondere für die schwierigeren Teilaufgaben empfiehlt es sich, separat Bahn und Stabilisator eines geeigneten Elements anzuschauen.

Aufgabe 3. Sei $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Zyklische Gruppe der Ordnung n.

a) Finde alle Untergruppen und die zugehörigen Links- und Rechtsnebrenklassen. Welche davon sind Normalteiler?

b) Finde alle Konjugationsklassen.

Hinweis: Die Konjugationsklasse C_x von $x \in G$ ist die Bahn bezüglich der adjungierten Wirkung von G auf sich selbst, also

$$C_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}.$$

c) Mache das selbe für die Diedergruppe D_4.

Aufgabe 4 (Strukturtheorem für endlich generierte abelsche Gruppen)**.** Zeige die folgende Aussage. Für jede endlich generierte abelsche Gruppe G existieren nicht negative ganze Zahlen $a, n, n_1, \ldots, n_a$ so dass

$$G \simeq \mathbb{Z}^n \times C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_a}$$

Gehe wie folgt vor. Für jedes Erzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_\ell)$ von G definiere

$$m(x_1, \ldots, x_\ell) = \inf \Big\{ m > 0 \mid \text{es existiert eine Relation } \textstyle\sum_{j=1}^{\ell} m_j x_j = 0 \text{ und } m_j = m \Big\}$$

Beachte, dass $m(x_1, \ldots, x_\ell)$ unendlich sein kann. Zeige,

a) es existiert ein Erzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_k)$ so dass k minimal unter allen Erzeugendensystemen; $m(x_1, \ldots, x_k)$ minimal unter allen Erzeugendensystemen mit länge k; $m(x_1, \ldots, x_k)$ gleich der Ordnung von x_1 ist. *Hinweis: Sei $x_1, \ldots, x_k$ ein Erzeugendensystem mit k und $m(x_1, \ldots, x_k)$ minimal. Dann gibt eine Relation $mx_1 + \sum_{j=2}^{k} m_j x_j = 0$ mit $0 \leq m_j < m$.*

b) für ein Erzeugendensystem wie in (a) ist die Abbildung

$$\langle x_1 \rangle \times \langle x_2, \ldots, x_k \rangle \to G \qquad (a, b) \mapsto a + b$$

ein Isomorphismus

c) $\langle x_1 \rangle$ ist zyklisch. Folgere durch Induktion über k das Strukturtheorem.