Aufgabe 1. Zeige, dass das Matrixexponential $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\exp(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^n$$

die folgenden Eigenschaften besitzt.

a) Wenn $[X, Y] = 0$ dann gilt $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y) = \exp(Y)\exp(X)$.

b) Betrachte eine Matrix in Jordan Normalform

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & & & \\ 0 & J_2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & J_{r-1} & 0 \\ & & & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

wobei jeder Jordan Block die Form

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & & \\ 0 & \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \lambda_k & 1 \\ & & & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

hat. Zeige, dass dann gilt

$$\exp(J_k) = e^{\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots \\ & & \cdots & & \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und folgere

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(J_1) & & & \\ & \exp(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(J_r) \end{pmatrix}$$

c) Für alle $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ gilt $A\exp(X)A^{-1} = \exp(AXA^{-1})$.

d) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von X, mit (algebraischer) Vielfachheit. Dann sind die Eigenwerte von e^X gerade $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$, mit Vielfachheit.

e) $\det(e^X) = e^{tr(X)}$.

Aufgabe 2.

a) Zeige, dass das Matrixexponential

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

surjektiv ist.
Hinweis: Ist dies zu schwer, so zeige man nur, dass das Bild dicht ist.

b) Zeige, dass das Bild der Exponentialabbildung

$$\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

enthalten ist in den Matrizen mit Spur > -2, und der Matrix $-\mathbb{1}$. Insbesondere ist exp nicht surjektiv, und das Bild ist auch nicht dicht, da z.B. alle Matrizen mit Eigenwerten $-a$, $-\frac{1}{a}$ $(a > 2)$ nicht im Bild liegen.

c) (opt) Zeige, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ zusammenhängend ist, indem Du von jedem $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ eine Kurve zur $\mathbb{1}$ konstruierst.

Aufgabe 3. Wir betrachten $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ mit den spurlosen Diagonalmatrizen als Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Dann ist wie in der Vorlesung

$$\mathfrak{h}_0^* \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1,..,1) \cong \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mid \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0\} \cong \underbrace{\{(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},0)\}}_{*}$$

Für diese Aufgabe ist es zweckmässig, die Darstellung (*) ganz rechts zu verwenden, wir setzen also immer $\lambda_n = 0$. Wir wählen die positiven Wurzeln wie in der Vorlesung. D.h., in (*) ist eine Wurzel positiv genau dann wenn das erste λ_k ungleich 0 positiv ist.

a) Zeige, dass die ganzzahligen Elemente von $\mathfrak{h}_0^*$ gerade die Elemente

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},0)$$

sind mit $\lambda_1,\dots\lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

b) Zeige, dass die dominanten Elemente gerade die sind mit

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq 0$$

Identifiziere also die ganzzahligen dominanten Elemente von $\mathfrak{h}_0^*$, also die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, mit Young Diagrammen mit höchstens $n-1$ Zeilen.

c) Die dualen co-Wurzeln ω_i sind definiert durch die Bedingung

$$2\frac{\langle \omega_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} = \delta_{ij}$$

wobei $\alpha_1, ...\alpha_{n-1}$ die einfachen Wurzeln sind. Zeige, dass die dualen co-Wurzeln für $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ gerade die Form haben

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (1,0,0..0)\\ \omega_2 &= (1,1,0,..0)\\ &\vdots\\ \omega_{n-1} &= (1,1,1,\dots,1,0)\end{aligned}$$

Bemerkung: Wie in der Vorlesung gesehen entsprechen die ganzzahligen, dominanten Element in $\mathfrak{h}_0^*$ gerade den nichtnegativ-ganzzahligen Linearkombinationen von den ω_i. Diese entsprechen also auch den Isomorphismenklassen von irreduziblen Darstellungen.

Aufgabe 4. Identifiziere jeweils die Young-Diagramme, die zu folgenden irreduziblen Darstellungen gehören.

a) Der Darstellung von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^n =: V$.

b) Der dualen Darstellung von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ auf V^*.

c) Der Darstellung von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ auf $S^2 V$.

d) Der Darstellung von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ auf $\Lambda^2 V$.

e) Der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ auf sich selbst.

f) Der $n + 1$-dimensionalen irreduziblen Darstellung V_n von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ aus der Vorlesung.

Hinweis: Teilweise wurden die jew. höchsten Gewichte schon in der letzten Serie berechnet.