Aufgabe 1 (Präsentationen von Gruppen)**.**

a) Zeigen Sie, dass die Präsentation (Erzeugende und Relationen)

$$\left\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^4 = acac^{-1} = aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} = 1 \right\rangle$$

die triviale Gruppe beschreibt.

b) Zeigen Sie, dass die Diedergruppe D_n die folgende Präsentation hat

$$\langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle$$

c) Finden Sie eine Präsentation von S_3.

Aufgabe 2. Die symmetrische Gruppe S_n hat eine Darstellung auf dem Vektorraum $V = \mathbb{C}^n$ durch Permutation der Basisvektoren (Standarddarstellung).

a) Zeigen Sie, dass die Darstellung V die direkte Summe zweier irreduzibler Darstellungen von S_n ist.

b) Welche Form hat allgemein eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, die mit der S_n-Wirkung kommutiert?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ und $O(n)$ Liegruppen sind, und berechnen Sie die Dimension und den Tangentialraum am Einselement. Benutzen Sie dazu den Satz vom regulären Wert: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung und $a \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von f, d.h. die Ableitung $df(x)$ ist surjektiv in jedem $x \in f^{-1}(a)$. Dann ist $M = f^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - m$, und der Tangentialraum in $x \in M$ ist $T_xM = \ker(df(x))$. [Lee, Thm 5.22ff oder Königsberger 3.5 (C^1-Fall)]

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe und $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung wobei V ein (endlich oder unendlich dimensionaler) $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.

a) Zeige, jeder invariante Unterraum $W \subset V$ hat ein invariantes komplement. *Hinweis: Betrachte den Operator* $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \pi_W \rho(g^{-1})$ *wobei* π_W *eine Projektion auf* W *ist.*

b) Zeige, V spaltet in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen auf

$$V \cong \oplus_{i \in I} V_i.$$

Hinweis: Verwende das Lemma von Zorn.

c) Man überzeuge sich, dass die gleiche Lösung für beliebige Körper $\mathbb{K}$ funktioniert, solange die Charakteristik von $\mathbb{K}$ die Gruppenordnung nicht teilt.