

Aufgabe 1. Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine komplexe endlich dimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe und $g \in G$ ein Element. Zeige:

- a) Es gibt eine Basis von V , in der $\rho(g^{-1})^T = \overline{\rho(g)}$.
Bemerkung: Folgere, dass die komplex konjugierte Darstellung $\bar{\rho} : G \rightarrow GL(\bar{V})$ und die duale Darstellung $\rho^ : G \rightarrow GL(V^*)$ isomorph sind.*
- b) $\rho(g)$ ist diagonalisierbar.
- c) (opt) Man kann nur aus der Kenntnis des Charakters χ von ρ die Eigenwerte von $\rho(g)$ und deren Vielfachheiten bestimmen. (Wie?)

Aufgabe 2. Bestimme alle komplexen irreduziblen Darstellungen und die Charaktertafel der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_n = \langle s \mid s^n = 1 \rangle$.

Hinweis: Die Gruppe ist abelsch, also sind alle Darstellungen eindimensional. Jede solche Darstellung ist durch eine Zahl, nämlich $\rho(s)$, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3. Finde die Charaktertafel der Diedergruppe

$$D_n = \langle s, t \mid s^n = t^2 = (st)^2 = 1 \rangle$$

Gehe dazu wie folgt vor, und betrachte jeweils den Fall $n = 2k$ gerade und $n = 2k + 1$ ungerade separat.

- a) Bestimme alle Konjugationsklassen.
Hinweis: Für $n = 2k$ gerade gibt es $k + 3$ viele, für $n = 2k + 1$ ungerade $k + 2$ viele.
- b) Bestimme alle eindimensionalen Darstellungen.
Hinweis: Diese sind jew. durch Angabe von 2 Zahlen, $\rho(s)$, $\rho(t)$ bestimmt, und es gibt 4 für gerade n und 2 für ungerade n .
- c) Zeige, dass alle anderen irreduziblen Darstellungen 2-dimensional sind.
- d) Bestimme alle 2-dimensionalen irreduziblen Darstellungen und die Charaktertafel.

Aufgabe 4. Betrachte die $n \times n$ -Matrix (diskreter Laplace-Operator)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Verifiziere, dass $A \in \text{Hom}_{D_n}(\mathbb{C}^n)$ ist, wobei D_n auf den $\mathbb{C}^n$ durch die offensichtliche Permutation der Basiselemente wirkt.
- b) Zerlege $\mathbb{C}^n$ jew. in irreduzible Darstellungen von D_n und von $\mathbb{Z}_n \subset D_n$. (D.h., bestimme jew. auch eine Basis der irreduziblen Unterdarstellungen, nicht nur deren Vielfachheit.)
Bemerkung: Die Zerlegung eines Vektors in die Komponenten bzgl. der $\mathbb{Z}_n$ -irreduziblen Darstellungen ist gerade die diskrete Fourier-Transformation.

- c) Bestimme alle Eigenvektoren und Eigenwerte von A , indem Du a), b) benutzt. Welche Information steckt jew. in der Symmetrie, welche nicht?
- d) Betrachte n Kugeln der Masse $m = 1$, zyklisch angeordnet auf einem Kreis vom Radius 1, jeweils mit den Nachbarn verbunden durch Federn auf dem Kreis (Federkonstante $k = 1$). Die Kugeln können sich nur auf dem Kreis bewegen. Finde alle Eigenmoden des Systems und die entsprechenden Eigenfrequenzen, indem Du die Symmetrien verwendest.