Aufgabe 1. Sei V eine endlich dimensionale komplexe Darstellung der endlichen Gruppe G. Sei $V = \bigoplus_j W_j$ die kanonische Zerlegung in isotypische Komponenten. Seien p_j die kanonischen Projektoren auf die W_j aus der Vorlesung. Wähle irgend ein G-invariantes Skalarprodukt auf V.

a) Zeige, dass die p_j selbst-adjungierte Operatoren sind.

b) Zeige, dass $W_i \perp W_j$ für $i \neq j$,

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe und $\{V_j\}_{j\in I}$ eine Liste der der endlich dimensionalen komplexen irreduziblen Darstellungen von G. Seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ bzw. $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ endlich dimensionale komplexe Darstellungen mit kanonischer Zerlegung in isotypische Komponenten

$$V \simeq \bigoplus_{j\in I} V_j \otimes \mathbb{C}^{n_j} \qquad\qquad V' \simeq \bigoplus_{j\in I} V_j \otimes \mathbb{C}^{n'_j}$$

Zeige, dass eine Abbildung $M \in \mathrm{Hom}(V, V')$ equivariant ist genau dann wenn

$$M = \bigoplus_{j\in I} \mathbb{1}_{V_j} \otimes M_j$$

für geeignete $M_j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n_j}, \mathbb{C}^{n'_j})$.

Aufgabe 3. Das Benzolmolekül hat $D_{6h} = D_6 \times \mathbb{Z}_2$ Symmetrie. Die 6 Elektronen in den p_z Orbitalen Delokalisieren. Näherungsweise schreiben wir die resultierende 1-Elektronen Wellenfunktion (Molekülorbital) als Linearkombination von Atomorbitalen (LCAO Metrode)

$$\Psi \in \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Psi_1, \ldots, \Psi_6)$$

wobei Ψ_j die Wellenfunktion des p_z Orbitals des jten Kohlenstoffatom ist. Das p_z Orbital ist eine ungerade Funktion in z.

In dieser Näherung betrachten wir also einen 6 dimensionalen Vektorraum, der 1-Elektron Hamiltonian ist eine 6×6 Matrix.

a) Unabhängig von der Form von H, wie viele verschiedene Energieniveaus mit welchen Degenerationen hat H höchstens, basierend auf Symmetrie? *Hinweis: Die Charaktertafel von D_6 wurde in Serie 3 berechnet.*

b) Bestimme die Eigenvektoren von H, das heisst die 1-Elektron Molekülorbitale. *Bemerkung: Dazu ist es nicht nötig H zu kennen, die Symmetrie reicht.* *Hinweis: Man kann dazu z.B. die Projektionen auf die isotypischen Komponenten verwenden.*

c) Sei

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\beta \geq 0$. Bestimme die Energieniveaus von H und die Besetzungszahlen des Grundzustandes des Benzolmoleküls.
Bemerkung: Wegen Spin passen jeweils 2 Elektronen in jedes Molekülorbital.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Symmetriegruppe O eines Würfels (oder Oktaeders, daher nennt man Sie Oktaedergruppe).

a) Sei $\tilde{O} = O \cap SO(n) \subset O$ die Untergruppe der Rotationen. Dann gilt $O \cong \tilde{O} \times \mathbb{Z}_2$.

b) Bestimme die Elemente von O, und die Konjugationsklassen.
Hinweis: Die Anzahl Elemente ist 48*, und es gibt* 10 *Konjugationsklassen.*

c) Bestimme die Charaktertafel von O.

d) Wir betrachten ein System von 8 Teilchen in den Ecken eines Würfels, die jeweils mit Federn entlang der Kanten des Würfels verbunden sind. Wie viele verschiedene Eigenfrequenzen hat das System höchstens? (Basierend auf der kubischen Symmetrie.) Betrachten Sie dazu eine geeignete Darstellung auf $\mathbb{C}^{24}$, berechnen Sie den Charakter und zerlegen Sie diesen in irreduzible Charaktere unter Benutzung von b).