Aufgabe 1.

a) Verifiziere explizit, dass in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n\times n}$ (mit Kommutator als Lie-Klammer) die Jacobi-Identität erfüllt ist.

b) Verifiziere, dass die Lie-Algebra von $O(p, q) = \{R \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid R^T I_{p,q} R = I_{p,q}\}$ gerade

$$\mathfrak{so}(p, q) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T I_{p,q} + I_{p,q} A = 0\}$$

ist. (Hier ist $I_{p,q}$ die Diagonalmatrix mit p Diagonaleinträgen 1 und q Diagonaleinträgen -1.) Zeige auch, dass $\mathrm{tr}(A) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{so}(p, q)$.

Aufgabe 2 (Quaternionen)**.** Definiere

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^4.$$

wobei i, j, k Symbole mit folgenden Relationen sind

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j.$$

a) Zeige, dass die Quaternionen eine $\mathbb{R}$-Algebra bilden.

b) Die Konjugation von Quaternionen ist definiert durch

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk.$$

Zeige, dass $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$ for all $p, q \in \mathbb{H}$. Zeige, dass $|q|^2 := q\bar{q} = \bar{q}q \geq 0$ für alle $q \in \mathbb{H}$, mit Gleichheit genau dann wenn $q = 0$. Zeige, dass $|pq| = |p||q|$ für alle $p, q \in \mathbb{H}$.

c) Zeige, für jedes $0 \neq q \in \mathbb{H}$ existiert ein $p \in \mathbb{H}$ so dass $pq = qp = 1$.
Bemerkung: Die Quaternionen bilden einen Schiefkörper

d) Zeige, dass

$$a + bi + cj + dk \mapsto \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}.$$

ein Homomorphismus von der Algebra der Quaternionen in die Algebra der komplexen 2×2 Matrizen ist.

e) Sei $\Im\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{H} \mid \bar{x} = -x\}$ (imaginäre Quaternionen) mit natürlicher Identifikation $\Im\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass für $x \in \Im\mathbb{H}$ und $q \in \mathbb{H}$ mit $|q| = 1$ gilt $qx\bar{q} \in \Im\mathbb{H}$. Zeige, dass für alle $q \in \mathbb{H}$ mit $|q| = 1$ die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad x \mapsto qx\bar{q}$$

eine Rotation ist und bestimme Drehwinkel und Rotationsachse.

Aufgabe 3. Die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ ist die Gruppe der reellen, invertierbaren $2n\times 2n$ Matrizen, welche die antisymmetrische, nicht degenerierte Bilinearform

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{n\times n} \\ -\mathbb{1}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten. Bestimme die Dimension von $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Finde eine Basis der Lie Algebra $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$.
Bemerkung: Man kann analog die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{K})$ *für einen beliebigen Körper* $\mathbb{K}$ *definieren.*

Aufgabe 4. Die kompakte symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n)$ ist die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{H}$, welche die Standard hermitesche Form auf $\mathbb{H}^n$ erhalten:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$

wobei x_i, y_i die Einträge der Vektoren $x, y \in \mathbb{H}^n$ sind. Also konkret:

$$\mathrm{Sp}(n) = \{A \in \mathbb{H}^{n\times n} \mid A^\dagger A = 1\},$$

wobei $A^\dagger = (\bar{A})^T$ die transponiert konjugierte Matrix ist, wobei die Konjugation aus 2.b) verwendet wird.

a) Bestimme die Dimension von $Sp(n)$, bestimme die Lie Algebra $\mathfrak{sp}(n)$ von $Sp(n)$, und finde eine $\mathbb{R}$-Basis.

b) Zeige, dass $\mathfrak{sp}(n) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$.

c) (opt) Zeige, dass $Sp(n)$ kompakt ist (wie der Name suggeriert) während $Sp(2n, \mathbb{R})$ nicht kompakt ist.