Aufgabe 1. Wir betrachten $\mathfrak{so}(3)$ mit der Basis

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i.e. $L_j v = e_j \times v$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$)

a) Zeige, dass die Zuordnung

$$L_3 \mapsto \tfrac{i}{2}h \qquad L_1 \mapsto \tfrac{1}{2}(e-f) \qquad L_2 \mapsto \tfrac{i}{2}(e+f)$$

einen Isomorphismus von rellen Lie Algebren $\mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{su}(2)$ definiert. Schliesse, dass die ebenso definierte Abbildung von komplexen Lie Algebren $\mathfrak{so}(3) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ein Isomorphismus ist.

b) In der Physik entsprechen $\hat{L} = \frac{\hbar}{i}(L_1, L_2, L_3)$ dem Drehimpulsoperator. Zeige, dass für den Casimiroperator Z wie in der VL gilt

$$\frac{\hbar^2}{2} Z = |\hat{L}^2| = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$$

Aufgabe 2.

a) Sei V_n die $n+1$ dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ mit Basis $e_0, \dots, e_n$, sodass $e_j = \rho(f)^j e_0$ wie in der Vorlesung. Wir können auf V_n ein Skalarprodukt definieren:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \tfrac{j!}{(n-j)!}.$$

Zeige, dass $\rho(h)^\dagger = \rho(h)$ und $\rho(e)^\dagger = \rho(f)$. Zeige, dass die Darstellung von $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ gegeben durch Einschränkung unitär ist.

b) Zeige, dass V_n tatsächlich irreduzibel ist.

Aufgabe 3. Die Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ hat eine Darstellung ν auf dem Raum P_n der homogenen Polynome mit komplexen Koeffizienten vom Grad n in 2 Variablen durch

$$(\nu(A)p)(x) = p(A^{-1}x)$$

a) Bestimme die entsprechende Darstellung ρ auf P_n der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. *Hinweis: Diese Darstellung ρ ist gerade die Ableitung von ν an der Identität. Z.B. ist*

$$\rho(h) = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \nu(\gamma(t))$$

wobei $\gamma(t)$ eine Kurve in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ mit $\gamma(0) = \mathbb{1}$ und $\dot{\gamma}(0) = h$ ist; z.B. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

b) Zeige, dass diese Darstellung isomorph ist zu V_n.

Aufgabe 4. Sei

$$V = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0})$$

wobei $\phi_n = 2^{-\frac{n}{2}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}$ mit $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx^n} e^{-x^2}$ die Hermite Funktionen sind.

a) Zeige, dass $\omega : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{End}(V)$ mit

$$\omega(h) = A^\dagger A + \frac{1}{2} \qquad \omega(e) = \frac{1}{2} A^\dagger A^\dagger \qquad \omega(f) = -\frac{1}{2} AA$$

eine Darstellung ist, wobei $A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$ und $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})$.

b) Zerlege V in irreduzible Darstellungen. Was ist deren Dimension?

c) Zeige, dass $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{End}(V)$ mit

$$\rho(h) = x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \qquad \rho(e) = \frac{i}{2} x^2 \qquad \rho(f) = \frac{i}{2} \frac{d^2}{dx^2}$$

eine Darstellung ist.