Aufgabe 1. (Teilweise Wiederholung MMP 1) Sei P_ℓ der Raum der homogenen Polynome vom Grad ℓ mit komplexen Koeffizienten in 3 Variablen. Sei

$$H_\ell = \{v \in P_\ell \mid \Delta v = 0\}$$

der Raum der Kugelfunktionen vom Grad ℓ. Wir betrachten beide Räume als Darstellungen von $O(3)$, wobei $R \in O(3)$ auf einem Polynom $p(x)$ wirkt als

$$(R \cdot p)(x) = p(R^T x).$$

a) Zeige, dass $\Delta : P_\ell \to P_{\ell-2}$ rotationsinvariant ist. Folgere, dass die Kugelfunktionen H_ℓ eine Darstellung von $O(3)$ bilden.

b) Bestimme die Dimension von H_ℓ.

c) Zeige, dass $(f, g) = \int_{\|x\|=1} \overline{f(x)} g(x) dx$ ein $O(3)$-invariantes Skalarprodukt auf P_ℓ, und also auch auf H_ℓ ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathfrak{so}(3)$ mit Basis (L_1, L_2, L_3) aus Serie 7.

a) Zeige, dass $\rho : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{gl}(H_\ell)$ mit

$$\begin{aligned}
\rho(L_1) &= -x_2 \partial_{x_3} + x_3 \partial_{x_2} \\
\rho(L_2) &= -x_3 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_3} \\
\rho(L_3) &= -x_1 \partial_{x_2} + x_2 \partial_{x_1}
\end{aligned}$$

eine Darstellung ist. Zeige ausserdem, dass diese Darstellung der Darstellung $\nu : O(3) \to GL(H_\ell)$ aus Aufgabe 1 entspricht, d.h., $\rho = D\nu(1)$.

b) Zeige, dass der Casimir-Operator (in der Normalisierung wie in der Vorlesung)

$$Z = 2(\rho(L_1)^2 + \rho(L_2)^2 + \rho(L_3)^2)$$

auf H_ℓ durch Multiplikation mit $2\ell(\ell + 1)$ wirkt.

c) Zeige, dass $\rho : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{End}(H_\ell)$ irreduzibel ist, und isomorph zur irreduziblen Darstellung $V_{2\ell}$ aus der Vorlesung.

d) In der MMP 1 haben wir gesehen, dass die Funktionen (in Polarkoordinaten)

$$p_m = r^\ell Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Polynome (in x_1, x_2, x_3) sind und eine Basis vom Raum der Kugelfunktionen H_ℓ bilden, wobei $m = -\ell, \ldots, \ell$.

Zeige, dass in dieser Basis der Operator L_3 diagonal ist, genauer

$$L_3 p_m = -imp_m.$$

Definiere ferner die Leiteroperatoren $L_\pm = L_1 \pm iL_2$ und zeige, dass

$$p_m = c_m L_-^{\ell-m} (x_1 + ix_2)^\ell$$

mit für uns unwichtigen Normalisierungskonstanten c_m. (Insbesondere kann man so die Kugelfunktionen durch die Leiteroperatoren erzeugen.)

Aufgabe 3. Wir betrachten die Lie Algebren $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) \otimes \mathbb{C}$, $n = 3, 4, \ldots$.

a) Finde jeweils eine Cartan Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Was ist der Rang von $\mathfrak{g}$?

b) Bestimme das Wurzelsystem $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ und die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$

c) Bestimme explizit die Killing-Form auf $\mathfrak{h}$. Bestimme auch den rellen Unterraum $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$, auf dem die Killingform ein (reelles) Skalarprodukt bildet.

Hinweis: Es empfiehlt sich, $n = 2k$ gerade und $n = 2k + 1$ ungerade separat zu betrachten.

Aufgabe 4. Betrachte eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Killing-Form $K(-,-)$. Betrachte eine Basis $\{e_j\}$ von $\mathfrak{g}$. Sei $(K_{ij} = K(e_i, e_j))$ die Matrix der Killing-Form und $((K^{-1})_{ij})$ die entsprechende inverse Matrix. Sei ferner $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung. Wir definieren dann den Casimir-Operator als

$$Z = \sum_{i,j} (K^{-1})_{ij} \rho(e_i) \rho(e_j).$$

a) Zeige, dass $Z \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$, also $\forall x \in \mathfrak{g} : \rho(x) Z = Z \rho(x)$.
Hinweis: Verwende die $\mathfrak{g}$-Invarianz der Killing-Form.

b) Folgere, dass falls V irreduzibel ist, $Z = \lambda 1_V$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

c) Berechne obiges Z für den Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ und zeige, dass der Operator bis auf eine multiplikative Konstante mit dem Z aus Serie 7 Aufgabe 1 übereinstimmt.

Bemerkung: Wir verwenden trotz der multiplikativen Konstante den gleichen Buchstaben und nennen beide Operatoren Casimir-Operator oder -Element.