Aufgabe 1. Seien $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kommutierende, diagonalisierbare $n \times n$-Matrizen. Sei $\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ der von den Matrizen aufgespannte Unterraum. Wir nehmen an, dass die Matrizen linear unabhängig sind, so dass $\dim \mathfrak{h} = r$.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass die Matrizen, und alle Matrizen in $\mathfrak{h}$, dann gleichzeitig diagonalisierbar sind. Das heisst, es gibt eine endliche Untermenge $\Delta = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}^r$ von verallgemeinerten Eigenwerten, und eine Zerlegung $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\Delta} V_\lambda$, so dass $Av = \lambda(A)v$ für alle $A \in \mathfrak{h}$, $v \in V_\lambda$.

Gehe dazu wie folgt vor:

a) Zeige zunächst folgende Hilfsaussage: Sei die $A \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar und $W \subset V$ ein A-invarianter Unterraum, d.h. $AW \subset W$. Dann ist die Einschränkung $A|_W \in \mathrm{End}(W)$ diagonalisierbar.

b) Folgere die Behauptung durch Induktion über r.

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan Unteralgebra. Sei $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung, V endlich dimensional. Wir zerlegen V in gemeinsame Eigenräume von den Abbildungen $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{h}$ (Gewichtsraumzerlegung),

$$V = \bigoplus_{\lambda\in W_\rho} V_\lambda$$

wobei $W_\rho \subset \mathfrak{h}^*$ die Menge der gemeinsamen Eigenwerte (genannt Gewichte) ist und V_λ der jeweilige Eigenraum, d.h., $\rho(x)v = \lambda(x)v\ \forall v \in V_\lambda$ (genannt Gewichtsraum).

Betrachte nun $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ mit der üblichen Darstellung ρ_1 auf $V_1 = \mathbb{C}^n$.

a) Berechne die Gewichte W_{ρ_1}. Bestimme auch das höchste Gewicht und die Gewichtsräume V_λ.

b) Berechne ebenso die Gewichte und Gewichtsräume für $V_2 = V_1 \otimes V_1$.

c) Wir zerlegen $V_2 = \wedge^2 V_1 \oplus S^2 V_1$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil. Berechne jeweils die Gewichte und das höchste Gewicht der $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$-Darstellungen auf $\Lambda^2 V_1$ und $S^2 V_1$.

d) Bestimme die Gewichtsraumzerlegung und das höchste Gewicht der Darstellung auf $V_1^{\otimes N}$.

Aufgabe 3. Betrachte wieder eine halbeinfache endlichdimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Wie in der Vorlesung zerlegen wir in gemeinsame $\mathfrak{h}$-Eigenräume

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

wobei $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ die Wurzeln sind. Zeige das folgende Lemma:

Lemma. Für alle Wurzeln $\alpha \in \Delta$ gilt $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$. Ausserdem ist $n\alpha \notin \Delta$ für $n = 2, 3, \ldots$.

Gehe dazu wie folgt vor.

a) Sei $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $E_\alpha \neq 0$, und sei $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Dann gilt

$$[E_\alpha, X] = K(E_\alpha, X)H_\alpha$$

wobei wie in der Vorlesung $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ definiert ist durch die Bedingung $K(H_\alpha, x) = \alpha(x)\ \forall x \in \mathfrak{h}$.

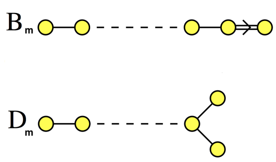
b) Wähle ein $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $K(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Betrachte wie in der Vorlesung die Lie Unteralgebra $s_\alpha \subset \mathfrak{g}$, isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, aufgespannt durch E_α, $E_{-\alpha}$ und H_α. Zeige, dass der Teilraum

$$V = \mathbb{C}E_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{g}_{-n\alpha} \subset \mathfrak{g}$$

eine Unterdarstellung von s_α ist.

c) Benutze die Klassifikation der Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ um zu zeigen, dass $\dim(\mathfrak{g}_{-\alpha}) = 1$ und $\dim(\mathfrak{g}_{-n\alpha}) = 0$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$, und zeige somit das Lemma.

Aufgabe 4. Bestimme die einfachen Wurzeln von $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ (für eine Wahl von positiven Wurzeln) und zeige, dass das Dynkin-Diagramm die folgende Form hat (B_m : $\mathfrak{so}(2m + 1, \mathbb{C})$; D_m : $\mathfrak{so}(2m, \mathbb{C})$).



Hinweis: Die Wurzeln wurden in Serie 8 Aufgabe 3 berechnet. Identifiziert man die Cartan Unteralgebra $\mathfrak{h}$ geeignet mit $\mathbb{C}^r$ ($n = 2r$ oder $n = 2r + 1$) so haben die Wurzeln die Form

n ungerade: $(0, ..., 0, \pm1, 0, ..., 0 \pm 1, 0, ...0)$, $(0, .., 0, \pm1, 0, ..., 0)$

n gerade: $(0, ..., 0, \pm1, 0, ..., 0 \pm 1, 0, ...0)$

Das Skalarprodukt durch die Killingform ist hier ferner das euklidische Skalarprodukt, bis auf eine unwichtige Normalisierungskonstante. Als positive Wurzeln kann man solche wählen, deren erste nicht-verschwindende Koordinate > 0 ist.