MMP II –ERGÄNZUNGEN ZUM SKRIPT

THOMAS WILLWACHER

Hier sollen die Themen der letzten Wochen der Vorlesung dargestellt werden, die in meinem Skript über Gruppen- und Darstellungstheorie nicht (oder nicht so wie in der MMP II-Vorlesung) behandelt werden. Fürs Mitteilen von etwaigen Tippfehlern bedanke ich mich im Voraus.

1. Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Wir haben bisher gesehen:

(1) Zu jeder Lie-Gruppe kann man eine Lie-Algebra
$$\mathfrak{g} = T_1 G$$
zuordnen.

(2) Homomorphismen von Lie-Gruppen $F : G \to H$, und insbesondere Darstellungen $\rho : G \to GL(V)$ ergeben Lie-Algebra Homomorphismen $DF(1) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, bzw. Darstellungen von Lie-Algebren $D\rho(1) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

(3) Wir haben gesehen, wie man Darstellungen von halbeinfachen Lie-Algebren klassifiziert.

Wir wollen nun von den Darstellungen und Morphismen der Lie-Algebren wieder zu denen der Gruppe zurückfinden.

1.1. Exponentialabbildung von Matrizen.

Wir betrachten den Raum der $n \times n$-Matrizen $\mathbb{K}^{n\times n} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Der Raum $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist ein normierter Vektorraum bzgl. der Operatornorm
$$\|X\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{K}^n \\ \|v\|_2=1}} \|Xv\|_2,$$
und es gilt dann $\|XY\| \le \|X\|\|Y\|$.

Lemma 1.1. *Die Reihe*
$$\exp(X) = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$
konvergiert absolut für alle $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Beweis. Es gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|X^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|X\|^k = e^{\|X\|}$$
Da (die Reihe von) $e^{\|X\|}$ konvergiert konvergiert die das Matrixexponential definierende Reihe also absolut. □

Lemma 1.2. *Es gilt für alle* $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$

- $e^X e^Y = e^{X+Y}$ *falls* $XY = YX$.
- e^X *is invertierbar, also* $e^X \in GL(n, \mathbb{K})$, *und* $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
- $Ae^X A^{-1} = e^{AXA^{-1}}$ *für alle* $A \in GL(n, \mathbb{K})$.

- $\det e^X = e^{trX}$.
- $(e^X)^\dagger = e^{X^\dagger}$.
- *$X \mapsto e^X$ ist analytisch und $\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^tX$.*

Beweis. Siehe Übungsserie. □

Lemma 1.3. *Die Abbildung* $\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to GL(n,\mathbb{K})$ *ist in einer Umgebung der eins* $1 = 1_{n\times n}$ *invertierbar. Eine explizite lokale Inverse ist*

$$\log X = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(X-1)^n}{n}$$

für $\|X - 1\| < 1$.

Beweis. Es reicht, die Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu zeigen. Die Logarithmusreihe ist absolut konvergent FÜR $\|x - 1\| < 1$, DA

$$\|\frac{(X-1)^n}{n}\| \leq \frac{\|(X-1)\|^n}{n}$$

und die skalare Logarithmusreihe konvergiert. Wie in der Analysis I gilt dann $\exp\log X = X$ für alle X mit $\|X - 1\| < 1$ und $\log\exp X = X$ für alle X mit $\|\exp X - 1\| < 1$. □

1.2. **Die Exponentialabbildung – allgemeiner Fall.** Sei nun G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g} = T_1G$ die Lie-Algebra von G. Wir bezeichnen für $g \in G$ die Linksmultiplikation mit g durch

$$L_g : G \to G$$
$$L_g h := gh.$$

Für $X \in \mathfrak{g}$ definieren wir dann das Vektorfeld auf G:

$$G \ni g \mapsto v_X(g) = DL_g(1)X \in T_gG.$$

Wir lösen dann die Differentialgleichung für $\varphi_X : I \to G$, auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, mit $0 \in I$

$$\begin{cases} \dot\varphi_X(t) & = v_X(\varphi_X(t)) \\ \varphi_X(0) & = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Da v_X ein C^∞-Vektorfeld ist wissen wir aus den entsprechenden Existenzsätzen der Analysis II, dass lokal, d.h. für eine genug kleine Umgebung von 0 eine Lösung existiert.

Ausserdem gilt $\varphi_X(s+t) = \varphi_X(s)\varphi_X(t)$. Beweis: Beide Seiten erfüllen für festes s die gleiche Differentialgleichung in t, es gilt nämlich die gleiche Anfangsbedingung

$$\varphi_X(s+0) = \varphi_X(s) = \varphi_X(s)\varphi_X(0)$$

und jeweils die Gleichung für die Ableitungen (in t)

$$\dot\varphi_X(s+t) = v_X(\varphi_X(s+t))$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_X(s)\varphi_X(t)) &= \frac{d}{dt}(L_{\varphi_X(s)}(\varphi_X(t))) = DL_{\varphi_X(s)}(\varphi_X(t))\dot\varphi_X(t) \\ &= DL_{\varphi_X(s)}(\varphi_X(t))v_X(\varphi_X(t)) = DL_{\varphi_X(s)}(\varphi_X(t))DL_{\varphi_X(t)}(1)X = D(\underbrace{L_{\varphi_X(s)} \circ L_{\varphi_X(t)}}_{=L_{\varphi_X(s)\varphi_X(t)}})(1)X \\ &= v_X(\varphi_X(s)\varphi_X(t)). \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der Differentialgleichung (siehe wieder Analysis II) folgt also die Behauptung.

Es folgt daraus auch, dass $\varphi_X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist (ÜA), wir können oben also $I = \mathbb{R}$ setzen.

Definition 1.4. *Die Exponentialabbildung ist definiert als*

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \exp(X) := \varphi_X(t = 1),$$

mit φ_X wie oben.

Bemerkung 1.5. Die Exponentialabbildung ist glatt (s. wieder die entsprechenden Sätze für die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen aus der Analysis II), und es gilt $D\exp(0) = id_{\mathfrak{g}}$ (ÜA). Also ist nach dem Inversen Funktionentheorem exp lokal invertierbar. Insbesondere enthält $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$ eine Umgebung der Identität $1 \in G$.

Beispiel 1.6. Für Lie-Untergruppen $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ ist die Exponentialabbildung gerade das Matrixexponential.

Beweis: Sei $g \in G \subset GL(n, \mathbb{K})$ eine Matrix in G und $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Dann ist $DL_g(1)X = gX$ (Matrizenprodukt). Wir müssen dann einfach prüfen, dass $\varphi_X(t) := e^{tX}$ die definierende Differentialgleichung (1) erfüllt. Es gilt offensichtlich die Anfangsbedingung $e^{0X} = 1$. Ausserdem gilt

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = Xe^{tX} = e^{tX} X = v_X(e^{tX}),$$

also sind wir fertig.

Bemerkung 1.7.
- Die Exponentialabbildung ist normalerweise nicht injektiv. Betrachte z.B. $SO(2) \cong S^1$ mit Lie-Algebra $\mathfrak{so}(2) = \mathbb{R}X$ mit

  $$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Es ist $X^1 = -1$, also

  $$\exp(tX) = \cos(t) \cdot 1 + \sin(t)X = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

  Insbesondere gilt $\exp(2\pi X) = 1 = \exp(0X)$.
- Die Exponentialabbildung ist auch nicht immer surjektiv. Betrachte z.B. $SL(2, \mathbb{R})$. Ein $A \in SL(2, \mathbb{R})$ kann man genau dann als $A = e^X$ schreiben für ein $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ falls $tr(A) > -2$ oder $A = -1$. (s. Übungsserie)

  Für nicht zusammenhängende G kann exp zudem nie Surjektiv sein, da exp stetig ist und $\mathfrak{g}$ zusammenhängend.
- In vielen praktisch relevanten Fällen ist exp allerdings surjektiv, oder zumindest das Bild dicht. Ist z.B. G kompakt und zusammenhängend, so ist exp surjektiv. Wir beweisen dies nur für $U(n)$. Jedes $U \in U(n)$ ist normal, d.h. $U^\dagger U = UU^\dagger$. Aus der linearen Algebra wissen wir also, dass U diagonalisierbar ist, genauer

  $$U = ADA^\dagger$$

  mit D einer Diagonalmarix mit Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und $A \in U(n)$. Da U unitär ist muss ferner gelten $|\lambda_j| = 1$ für alle j, also $\lambda_j = e^{it_j}$ mit $t_j \in \mathbb{R}$. Sei T die Diagonalmatrix mit Einträgen $t_1, \dots, t_n$. Dann gilt also

  $$U = ADA^\dagger = Ae^{iT}A^\dagger = e^{iATA^\dagger}.$$

  Nun erfüllt $X := iATA^\dagger$ offensichtlich die Bedingung $X^\dagger = -X$, ist also ein Element der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(n)$. Also ist U im Bild der Exponentialabbildung, und da U beliebig war ist exp surjektiv.

- Die Exponentialabbildung ist verträglich mit Lie-Gruppenhomomorphismen $F : G \to H$. Genauer: Sei $f = DF(1) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ die entsprechnde Abbildung der Lie-Algebren. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{g}$

$$F(\exp(x)) = \exp(f(x)).$$

1.3. **Lie-Algebren und Lie-Gruppen.**

Satz 1.8. *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Sei $U \subset G$ eine offene Umgebung der $1 \in G$. Dann erzeugt U die Gruppe G, d.h., jedes $g \in G$ kann geschrieben werden als Produkt $g = g_1 \cdots g_n$ von Elementen $g_1, \ldots, g_n \in U$, für ein n.*

Wir wollen zunächst daran erinnern, dass eine Mannigfaltigkeit (oder allgemeiner ein topologischer Raum) G zusammenhängend heisst, falls folgendes gilt: Sei $V \subset G$ offen und abgeschlossen. Dann ist entweder $V = G$ oder $V = \emptyset$.

Beweis. Wir können vereinfachend annehmen, dass $U^{-1} = U$, ansonsten ersetzen wir $U \to U \cap U^{-1}$.

Sei $V = \bigcup_n = 1^\infty U^n$ die Menge aller Elemente, die als Produkte von Elementen von U geschrieben werden können. Unser Ziel ist zu zeigen, dass $V = G$. Da G zusammenhängend ist, reicht es zu zeigen, dass V offen und abgeschlossen ist.

- V ist offen: Sei $g \in V$. Dann ist Ug eine offene Umgebung von g und liegt auch in V, also ist V offen.
- V ist abgeschlossen: Sei $g \in \bar{V}$ ein Element im Abschluss. Dann ist gU eine offene Umgebung von g. Also existiert ein $h \in V \cap gU$. Dann gilt also für ein $x \in U$ dass $h = gx$, also $g = hx^{-1}$, also $g \in hU$, also $g \in V$. Also ist $\bar{V} = V$ und damit V abgeschlossen.

□

Wir erhalten:

Korollar 1.9. *Seien G, H Lie-Gruppen und G zusammenhängend. Dann ist die Abbildung (Differential an der Stelle 1)*

$$D(1) : \mathrm{Hom}_{Lie-Grp.}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{Lie-Alg.}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \tag{2}$$

surjektiv. Das heisst, eine Abbildung der Lie-Gruppen ist schon eindeutig bestimmt durch die entsprechende Abbildung der Lie-Algebren. Insbesondere ist jede Darstellung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G schon eindeutig bestimmt durch die zugehörige Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

Beweis. Sei $F : G \to H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen und $f = DF(1) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ die zugehörige Abbildung von Lie-Algebren. Dann gilt wie gesehen

$$F(\exp(X)) = \exp(f(X)).$$

Also ist durch f die Abbildung F eindeutig bestimmt auf dem Bild von exp in G. Da aber $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$ eine offene Umgebung der $1 \in G$ enthält, und nach dem vorherigen Satz diese G erzeugt, ist F auf ganz G eindeutig bestimmt. □

Ferner kann man zeigen (s. Fulton-Harris, Kapitel 8):

Satz 1.10. *Ist G zusätzlih einfach zusammenhängend, d.h., jede geschlossene Kurve in G ist stetig zusammenziehbar, so ist die Abbildung* (2) *bijektiv.*

Falls G nicht einfach zusamenhängend ist, so ist gegebenenfalls nicht jede Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf g fortsetzbar. Ausserdem enthält die Lie-Algebra im Allgemeinen keine Informationen über die Zusammenhangskomponenten von G, ausser die der Identität $G_0 \subset G$, denn die Lie-Algebren von G_0 und G sind gleich. Man kann nun allgemein untersuchen, welche Darstellungen der Lie Algebra sich auf Darstellungen der Gruppe G fortstzen lassen. Wir werden dies aber nur in Beispielen anschauen.

2. SO(3), $SU(2)$ und die Lorentzgruppe

2.1. SO(3) und $O(3)$. Siehe Felder-Skript, Kapitel 5.1-5.3.

2.2. $SU(2)$ und der Homomorphismus $SU(2) \to$ SO(3). Siehe Felder-Skript, Kapitel 5.4. Wir wollen nur für später dieses Resultat in unserer Notation herausziehen:

Lemma 2.1. *Die Abbildung $D\rho(1) : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ ist gegeben durch*

$$-i\sigma_1 \mapsto 2L_1$$
$$-i\sigma_2 \mapsto 2L_2$$
$$-i\sigma_3 \mapsto 2L_3.$$

Dies ist offensichtlich ein Isomorphismus.

2.3. Darstellungen von $SU(2)$. Wir klassifizieren nun die endlich-dimensionalen Darstellungen von $SU(2)$. Da $SU(2) \cong S^3$ einfach zusammenhängend ist wissen wir (prinzipiell) schon, dass die komplexen Darstellungen von $SU(2)$ identisch sind zu denen von $\mathfrak{su}(2)$, und letztere haben wir schon klassifiziert (beachte, dass $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2, C)$.

Satz 2.2. (1) *Alle komplexen endlich-dimensionalen Drastellungen von $SU(2)$ sind vollständig reduzibel.*
(2) *Die $n+1$-dimensionalen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{su}(2)$ auf V_n (siehe vorher) setzen sich auf Darstellungen von $SU(2)$ fort.*
(3) *Sei V eine irreduzible Drastellung von $SU(2)$ der Dimension $n+1$. Dann ist sie isomorph zu V_n.*

Da die Darstellungstheorie von $SU(2)$ sehr wichtig ist, wollen wir diesen Satz (nochmals) Schritt für Schritt (und etwas pedantisch") beweisen.

- Sei $\rho : SU(2) \to GL(V)$ eine endlich-dimensionale komplexe Darstellung von $SU(2)$. Wir erhalten daraus eine komplexe Darstellung $\nu = D\rho(1) : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(V)$ der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$. Beachte, dass hier $\mathfrak{su}(2)$ eine reelle Lie-Algebra ist und $\mathfrak{gl}(V)$ eine komplexe, und ν ein Lie-Algebra Homomorphismus von reellen Lie-Algebren. Also ist die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung
$$\nu_{\mathbb{C}} : \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(V)$$
definiert durch $\nu_{\mathbb{C}}(x+iy) = \nu(x) + i\nu(y)$ ein $\mathbb{C}$-Lie-Algebra Homomorphismus, also eine Darstellung von $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
- Wie wir gesehen haben ist jede $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-Darstellung ist vollständig reduzibel,
$$V \cong \bigoplus_{j=1}^{k} V_{m_j}.$$
Alle Matrizen $\nu_{\mathbb{C}}(x)$ sind also Blockdiagonal bzgl. dieser Zerlegung. Dies gilt insbesondere für alle $x \in \mathfrak{su}(2)$. Also gilt dies auch für alle $\rho(\exp(x)) = \exp(\nu(x))$, also für alle $\rho(A)$, $A \in SU(2)$. Die einzelnen Summanden V_{m_j} sind $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-irreduzibel,

also auch $\mathfrak{su}(2)$-irreduzibel, also auch $SU(2)$-irreduzibel, da jeder $SU(2)$-invariante Unterraum insbesindere auch $\mathfrak{su}(2)$-invariant ist, und damit auch $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-invariant.

Damit folgt, dass jede $SU(2)$ Darstellung wie im Satz vollständig reduzibel ist.

- Wir wollen nun zeigen, dass jede Darstellung V_n von $\mathfrak{su}(2)$ fortsetzbar ist auf eine Darstellung von $SU(2)$. Sei dazu $U_n = \mathbb{C}[z_1, z_2]_n$ der Raum der homogenen Polynome in zwei Variablen. Offensichlich gilt $dim\, U_n = n + 1$, und jedes Polynom im Raum hat die Form $p(z) = \sum_{k=0}^n c_j k z_1^k z_2^{n-k}$. Wir definieren die Darstellung von $SU(2)$ (bzw. allgemeiner $SL(2,\mathbb{C})$):
$$\rho_n : SU(2)(\text{bzw. } SL(2,\mathbb{C})) \to GL(U_n)$$
$$(\rho_n(A)p)(z) = p(A^{-1}z).$$
Die zugehörige Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = span(h, e, f)$ ist:
$$(\nu_n(h)p)(z) = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} \rho_n(e^{th})p(z) = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} p(e^{-th}z) = (-z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2})p(z)$$
$$(\nu_n(e)p)(z) = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} p(e^{-te}z) = -z_2\partial_{z_1} p(z)$$
$$(\nu_n(f)p)(z) = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} p(e^{-tf}z) = -z_1\partial_{z_2} p(z)$$
Aus Serie 7, Aufgabe 3 wissen wir:

Lemma 2.3. *Die Darstellung U_n von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist isomorph zu V_n.*

Also setzen sich insbesondere die Darstellungen V_n auf $SU(2)$ (und $SL(2,\mathbb{C})$, und sogar $GL(2,\mathbb{C})$) fort.

- Sei nun $\rho : SU(2) \to GL(V)$ eine irreduzible Darstellung der Dimension $n + 1$. Sei wieder $\nu : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(V)$ die zugehörige Darstellung der Lie-Algebra. Dann ist ν und $\nu_{\mathbb{C}}$ (definiert wie oben) irreduzibel, denn ist $W \subset V$ ein $\mathfrak{su}(2)$-invarianter Unterraum, so ist dieser auch $\exp(\mathfrak{su}(2))$, also auch $SU(2)$-invariant. Wir wissen aber aus der Klassifikation der Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: $\nu_{\mathbb{C}}$ ist isomorph zu ν_n von vorher, d.h. es existiert ein linearer Isomorphismus $\phi : V \to U_n$, so dass
$$\phi \circ \nu_C(x) = \nu_n(x) \circ \phi$$
für alle $x \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Insbesondere gilt also für alle $x \in \mathfrak{su}(2)$:
$$\phi \circ \rho(\exp(x)) = \phi \circ \exp(\nu(x)) = \exp(\nu_n(x)) \circ \phi = \rho_n(\exp(x)) \circ \phi.$$
Also gilt $\phi\circ\rho(A) = \rho_n(A)\circ\phi$ für alle $A \in SU(2)$. Damit ist der Satz oben bewiesen.

Bemerkung 2.4. Die $SU(2)$-Darstellung auf U_n ist unitär bezüglich des Skalarproduktes
$$\langle p, q\rangle = \bar{p}(\partial_{z_1}, \partial_{z_2})q(z_1, z_2)\mid_{z_1=z_2=0}.$$
(Übungsaufgabe)

2.4. **Darstellungen von** SO(3)**.** Die Lie-Gruppe SO $\cong S^3/\{\pm 1\} \cong \mathbb{RP}^3$ ist nicht einfach zusammenhängend, also setzen nicht (unbedingt) alle Darstellungen von $\mathfrak{so}(2)$ auf SO(3) fort. Es gilt der flgende Satz.

Satz 2.5.
(1) *Alle komplexen irreduziblen Darstellungen von* SO(3) *sind vollständig reduzibel.*
(2) *Von den irreduziblen Darstellungen V_n von $\mathfrak{so}(3)$ setzen sich genau die mit $n = 2l$ gerade auf* SO(3) *fort.*
(3) *Sei V eine komplexe irreduzible Darstellung von* SO(3) *der Dimension $n+1$. Dann ist n ungerade und $V \cong V_n$.*

Beweis. (1) Dies geht wie vorher für $SU(2)$.

(2) Wir betrachten die Darstellung ρ_l von SO(3) auf dem Raum der Kugelfunktionen

$$H_l = \{p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \mid p \text{ homogen vom Grad } l, \Delta p = 0\},$$

gegeben durch

$$(\rho_l(R)p)(x) = p(R^{-1}x).$$

Die Dimension von H_l ist $2l + 1$, siehe MMP I. Diese Darstellung ergibt die folgende Darstellung von $\mathfrak{so}(3)$, mit $X \in \mathbb{R}^3$:

$$(\nu_l(X \cdot L)p)(y) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\; p(e^{-X \cdot Lt}y) = -x \cdot (y \wedge \nabla)p(y).$$

Wir erhalten daraus eine Darstellung $\tilde{\nu}_l$ von $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ und entsprechend auch von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Benutzen wir die Abbildung $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ von Lemma 2.1, so sehen wir, dass die Darstellung $\tilde{\nu}_l$ von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C}$ wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nu}_l(h)p)(y) &= -2i(y_1\partial_{y_2} - y_2\partial_{y_1})p(y)\\
(\tilde{\nu}_l(e)p)(y) &= (y_3(\partial_{y_1} + i\partial_{y_2}) - (y_1 + iy_2)\partial_{y_3})p(y)\\
(\tilde{\nu}_l(f)p)(y) &= (y_3(-\partial_{y_1} + i\partial_{y_2}) + (y_1 - iy_2)\partial_{y_3})p(y)
\end{aligned}$$

Aus Serie 8, Aufgabe 2 wissen wir:

Lemma 2.6. *Die Darstellung H_l von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (und auch $\mathfrak{so}(3)$) ist isomorph zu V_{2l}.*

Also lassen sich die Darstellungen V_{2l} auf SO(3) fortsetzen.

Wir zeigen noch, dass ich die Darstellungen $V_n \cong W_n$ von $\mathfrak{so}(3)$ für n ungerade nicht auf SO(3) fortsetzen lassen. Falls sie fortsetzen würden hätten wir nämlich folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{su}(2) & \longrightarrow & \mathfrak{so}(3) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(W_n)\\
\big\downarrow{\scriptstyle \exp} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp}\\
SU(2) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(3) & \longrightarrow & GL(W_n)
\end{array}$$

Wir betrachten nun das Element

$$\pi i\sigma_1 = \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$$

und verfolgen es von oben links durch das Diagramm. Gehen wir erst nach unten und dann nach recht so erhalten wir

$$\pi i\sigma_1 \mapsto \exp(\pi i\sigma_1) = -1 \mapsto 1(\in \mathrm{SO}(3)) \mapsto 1(\in GL(W_n)).$$

Laufen wir stattdessen erst nach rechts und dann runter, so erhalten wir

$$\pi i\sigma_1 \mapsto -2\pi L_1 \mapsto \pi i(-z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2}) \overset{\exp}{\mapsto} -1.$$

Für den letzten Schritt muss man beachten, dass

$$\pi i(-z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2})(z_1^k z_2^{n-k}) = \pi i(n-2k)z_1^k z_2^{n-k}$$

ist, also der Differentialoperator diagonal wirk, mit ungeraden (da n ungerade) Vielfachen von πi auf der Diagonalen. Da $-1 \neq 1$ haben wir einen Widerspruch und sind fertig.

(3) Dieser Punkt funktioniert wieder wie für $SU(2)$.

□

Bemerkung 2.7. Die SO(3)-Darstellung auf den Kugelfunktionen H_l ist unitär bezüglich des Standard-L^2-Skalarproduktes

$$\langle p, q \rangle = \int_{S^2} \bar{p} q.$$

Ausserdem bilden die Polynome $u_{l,m}$, in Kugelkoordinaten gegeben durch $r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$ (mit Y_{lm} den Kugelfunktionen wie in MMO I) eine Orthogonalbasis, wobei $m = -l, \dots, l$. Es gilt nun $Y_{lm}(\theta, \phi) \propto P_{l,m}(\cos(\theta) e^{im\phi}$, also insbesondere (wieder in kartesischen Koordinaten)

$$u_{l,m}(x_1, x_2, x_3) \propto p_{l,m}(x_3)(x_1 + ix_2)^m$$

für ein Polynom $p_{l,m}$. Also gilt

$$\tilde{v}_l(h) u_{l,m} = 2m u_{l,m}.$$

Die Unterräume $\mathbb{C} u_{l,m}$ sind also gerade die Gewichtsräume der Darstellung $\tilde{v}_l$. Ferner gilt (s. Felder Skript für die detailliertere Herleitung der Vorfaktoren)

$$\begin{aligned} \tilde{v}_l(e) u_{l,m} &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} u_{l,m+1} \\ \tilde{v}_l(f) u_{l,m} &= \sqrt{(l-m+1)(l+m)} u_{l,m-1}. \end{aligned}$$

man kann also durch Anwendung dieser Aufsteige- und Absteigeoperatoren die Kugelfunktionen für festes l auseinander erhalten.

2.5. **Tensorprodukte von $SU(2)$-Darstellungen.** Wir erinnern daran, dass die Darstellung irreduzible Darstellung V_n von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (bzw. auch $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{C})$) der Dimension $n+1$ die Basis $e_0, e_1, \dots, e_n$ hat mit

$$\begin{aligned} e_j &= \rho(f)^j e_0 \\ \rho(h) e_j &= (n-2j) e_j \\ \rho(e) e_j &= j(n-j+1) e_{j-1}, \end{aligned}$$

wobei h, e, f die Erzeugenden von der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sind, wie vorher.

Der folgende Satz ist sehr wichtig und wird häufig in der Physik und der Mathematik benötigt.

Satz 2.8 (Clebsch-Gordan-Zerlegung)**.** *Für $n, m \geq 0$ hat man einen Isomorphismus von Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (bzw. natürlich ebenso von $SU(2)$-Darstellungen und $SL(2, \mathbb{C})$-Darstellungen)*

$$V_n \otimes V_m \cong V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus \dots \oplus V_{|n-m|}.$$

Die irreduzible Darstellung $V_{n+m-2l} \subset V_n \otimes V_m$ wird hierbei aufgespant durch die Vektoren $w_l, \rho(f) w_l, \dots, \rho(f)^{n+m-2l} w_l$ mit

$$w_l = \sum_{j=0}^{l} (-1)^j \frac{(n-j)!(m-l+j)!}{j!(l-j)!} e_j \otimes e_{l-j}.$$

Beweis. Die erste Aussage wurde schon in der Serie gezeigt. Für die 2. Aussage über die Form der Höchstgewichtsvektoren w_l muss man einfach überprüfen, dass die angegebenen w_l tatsächlich Höchstgewichtsvektoren vom Gewicht $n+m-2l$ sind, das heisst ($w_l \neq 0$ und)

$$\rho(h) w_l = (n+m-2l) w_l \qquad \rho(e) w_l = 0.$$

Beides folgt durch einfache explizite Rechnung (ÜA). □

Beispiel 2.9.

- Betrachtet man in der Quantenmechanik ein aus 2 Teilsystemen (mit Hilberträumen H_1, H_2) zusammengestztes System, so ist der der Hilbertraum des Gesamtsystems $H_1 \otimes H_2$.

  Betrachte z.B. zwei (verschiedene) Spins $\frac{1}{2}$, z.B. ein Proton und ein Neutron, wobei wir alle anderen (nicht-spin) Freiheitsgrade vernachlässigen. Die einzelnen Hilberträume sind jeweils V_1 (Spin $\frac{1}{2}$). Wir haben nun für den Hilbertraum des Gesamtsystems

  $$V_1 \otimes V_1 \cong V_2 \oplus V_0.$$

  Das heisst, das aus Proton und Neutron zusammengesetzte System (z.B. Deuteriumkern) kann sich verhalten wie ein Spin 0, oder Spin 1 Teilchen.

  Hierbei ist V_2 erzeugt vom Hächstgewichtsvektor $w_0 = e_0 \otimes e_0$ und der symmetrische Teilraum, und V_0 erzeugt von $w_1 = e_0 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_0$ der antisymmetrische Teilraum.
- Sind nun beide Teilchen (wie vorher) gleiche Fermionen, z.B. 2 Elektronen oder 2 Protonen, so ist der Hilbertraum der äussere Produktraum, $\Lambda^2 V_1 \cong V_0$. Das Gesamtsystem verhält sich also wie ein Teilchen vom Spin 0.
- Nehmen wir an beide Teilchen sind identische Bosonen, so hat das Gesamtsystem Hilbertraum $S^2 V_1 = V_2$, verhält sich also wie ein Spin 1 Teilchen. (Physikalisch existieren allerdings keine Bosonen mit Spin $\frac{1}{2}$ wegen des Spin-Statistik-Theorems.)

2.6. **Minkowskiraum und Lorentzgruppe.** Hier sind wir dem Felder-Skript, Kapitel 5.5-5.10 gefolgt.

2.7. **Der Homomorphismus $SL(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}_+(1,3)$.** Dies ist im Felder-Skript Kapitel 5.10.

2.8. **Darstellungen von $SL(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ und $\mathrm{SO}(1,3)$.** Wir haben gesehen, dass (als reelle Lie Algebren) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{so}(1,3)$, und ausserdem

$$(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2,C) \oplus \mathfrak{sl}(2,C)$$

als komplexe Lie-Algebren. Hierbei ist die Abbildung von links nach rechts gegeben durch

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \ni x \mapsto (x,\bar{x}) \in \mathfrak{sl}(2,C) \oplus \mathfrak{sl}(2,C). \tag{3}$$

Die Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,C) \oplus \mathfrak{sl}(2,C)$ kann man mit dem folgenden Satz finden.

Satz 2.10. *Seien $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ komplexe halbeinfache Lie-Algebren. Dann sind die komplexen endlich dimensionalen irreduziblen Darstellungen der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}'$ gerade die Darstellungen der Form*

$$\rho_\lambda \otimes \rho'_\mu : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}' \to \mathfrak{gl}(V\lambda \otimes V'_\mu)$$
$$x + x' \mapsto \rho_\lambda(x) \otimes 1 + 1 \otimes \rho'_\mu(x'),$$

wobei $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_\lambda)$ (bzw. $\rho'_\mu : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{gl}(V'_\mu)$) über die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ (bzw. $\mathfrak{g}'$) läuft.

Beweis. s. Übung. □

Die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,C) \oplus \mathfrak{sl}(2,C)$ sind also gerade von der Form $V_m \otimes V_n$ mit $m,n = 0,1,2,\dots$. Beachtet man (3), so wirkt ein $x \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ in dieser Darstellung als

$$\rho_m(x) \otimes 1 + 1 \otimes \overline{\rho_n(x)},$$

da $\rho_n(\bar{x}) = \overline{\rho_n(x)}$. Man schreibt daher die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$ als

$$V_m \otimes \bar{V}_n.$$

Es ist klar, dass diese Darstellungen auf $SL(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$ fortsetzen, siehe die Konstruktion der $W_n \cong V_n$, die auch für $SL(2,\mathbb{C})$ funktioniert. Mit ähnlichen Argumentenwie im Fall $SU(2)$ erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 2.11. *Alle endlich dimensionalen komplexen Darstellungen von $SL(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$ sind vollständig reduzibel, und isomorph zu direkten Summen der $V_m \otimes \bar{V}_n$.*

Department of Mathematics, ETH Zurich, Rämistrasse 101, 8092 Zurich, Switzerland
Email address: thomas.willwacher@math.ethz.ch