Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Winter 2020

Basisprüfung Lineare Algebra

Datum	Freitag, 24. Januar 2020	Note

1	2	3	4	5	Total	Bonus	
6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	30 P	Übungen	Anz. Blätter

Auf die Aufgaben dürfen Sie erst auf Anweisung des Assistenten umblättern! Sie können die Hinweise jedoch jetzt durchlesen.

Allgemeine Hinweise:

- Diese Prüfung ist **anonymisiert**: Bitte tragen Sie auf den abgegebenen Blättern jeweils nur Ihre Initialen und Ihre Matrikel-Nummer ein (**nicht** Ihren vollständigen Namen).
- Kleben Sie das Etikett mit Ihren Initialen und Ihrer Matrikel-Nummer oben auf dem grossen leeren Feld auf.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine**.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!
  Hinweis: In dieser Prüfung gibt es **keine** Multiple-Choice-Aufgabe.

- Beginnen Sie jede der fünf Aufgaben auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihre Initialen und Matrikel-Nummer auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig.

Vor dem Start der Prüfung:

- Ein Etikett mit Ihren Initialen und Matrikel-Nummer sollte auf dem Couvert sein und ein zweites Etikett auf der vordersten Seite der Prüfungsaufgaben.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- Legen Sie genug leere Blätter auf dem Tisch bereit, sodass Sie nicht mehr zur Tasche greifen müssen.

Am Ende der Prüfung:

- Geben Sie die Prüfungsaufgaben und auch Ihre Antworten gemeinsam in das Couvert.
- Kleben Sie das leere Etikett auf die Lasche des Couverts, sodass das Couvert versiegelt ist, und unterschreiben Sie auf das Etikett. (Benutzen Sie *nicht* die Kleblasche des Couverts.)
- Warten Sie bis alle Prüfungen gezählt sind.

Bei Fragen und Unklarheiten fragen Sie die anwesenden Assistenten.

Viel Erfolg!

Notenskala: Die maximal erreichbare Punktzahl ist 30. Für die Note 6.00 benötigen Sie mindestens 28 und für die Note 4.00 mindestens 14 Punkte.

Bitte wenden!

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. [6 Punkte]

a) Finden Sie die Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$ an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G} = \operatorname{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & x(t) & \longmapsto & t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2\,,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3\,.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c**) beschrieben wird?

5. [6 Punkte] Seien $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ beliebig, und $I_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Identitätsmatrizen.

a) Berechnen Sie

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}.$$

b) Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe **a**) und Determinanten, um zu zeigen, dass AB und BA dieselben nicht-nullen Eigenwerte mit <u>derselben Multiplizität</u> haben.