

Midterm Test

Einsendeschluss: Freitag, den 15.11.2019 18:00 Uhr
Online-Abgabe auf Echo

Dieser Test dient, seriös bearbeitet, als Repetition des bisherigen Vorlesungsstoffes und als Übung für die Prüfung. Es werden auch Lösungen veröffentlicht werden.

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & 8 \\ -2 & 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Der Rang der Matrix A ist:

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 4

2. Gegeben sei die $m \times n$ -Matrix A , wobei $\text{Rang}(A) = m \leq n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.
- (b) $Ax = b$ hat für jede b mindestens eine Lösung.
- (c) Falls $m = n$, hat $Ax = b$ für jede b eine eindeutige Lösung.
- (d) Falls $m = n$, gibt es $x \neq 0$, so dass $Ax = 0$.

3. Gegeben seien die orthogonale Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

und der Vektor

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist

- (a) $x = [-2\sqrt{3} \quad -\sqrt{2} \quad 0]^T$.
- (b) $x = [2\sqrt{3} \quad -\sqrt{2} \quad 0]^T$.
- (c) $x = [5/\sqrt{3} \quad -2\sqrt{2} \quad \sqrt{6}/3]^T$.
- (d) $x = [7/\sqrt{3} \quad -\sqrt{2} \quad -\sqrt{6}/3]^T$.

4. Wir betrachten drei $n \times n$ -Matrizen A , B und C , so dass $AB = AC = I_n$.
Dann gilt $B = C$.

- (a) Richtig
- (b) Falsch

5. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) Die Matrix A ist nicht invertierbar.

6. Für einen Vektor x definieren wir seine euklidische Norm als $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. Für eine orthogonale $n \times n$ -Matrix Q gilt $\|x\|_2 = \|Qx\|_2$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Richtig

(b) Falsch

7. Wir betrachten n linear unabhängige Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ und die Matrix $A := [a^{(1)} \mid \dots \mid a^{(n)}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist A invertierbar.

(a) Richtig

(b) Falsch

8. Welche der folgenden Lösungsmengen sind Unterräume von \mathbb{R}^3 ?

(a) $L_1 = \{[x, 2x + y, y - 2]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

(b) $L_2 = \{[x, 0, y]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

(c) $L_3 = \{0 = [0, 0, 0]^T \in \mathbb{R}^3\}$

9. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

und die Menge $L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^2\}$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

- (a) L ist ein Unterraum des Vektorraums \mathbb{R}^2 .
- (b) L ist ein Unterraum des Vektorraums \mathbb{R}^3 .
- (c) Die Vektoren $b^{(1)} = [1 \ 0]^T$, $b^{(2)} = [0 \ 1]^T$ und $b^{(3)} = [2 \ -3]^T$ bilden ein Erzeugendensystem von L .
- (d) Die Vektoren $a^{(1)} = [1 \ 0 \ 2]^T$ und $a^{(2)} = [0 \ 1 \ -3]^T$ bilden ein Erzeugendensystem von L .

10. Für $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $u \in \mathbb{R}^2$ mit $u^T u = 1$ betrachten wir die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad B = I_2 - 2uu^T.$$

Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

- (a) A ist orthogonal, nicht aber B .
- (b) B ist orthogonal, nicht aber A .
- (c) A und B sind orthogonal.
- (d) AB ist orthogonal.