Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 4

Aufgabe 4.1 Householdertransformation

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, die den Nullpunkt enthält. Man kann dann durch einen Normalenvektor v, der orthogonal zur Hyperebene Σ ist, die Spiegelung an der Hyperebene Σ beschreiben. Ist v als Spaltenvektor gegeben und I die n-dimensionale Einheitsmatrix, dann wird die entsprechende lineare Abbildung durch die folgende Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt:

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T.$$

4.1a) Beweisen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $(vv^T)^T = vv^T$.

4.1b) Beweisen Sie, dass H eine Orthogonalmatrix ist.

4.1c) Beweisen Sie, dass $H^2 = I$ gilt.

Aufgabe 4.2 Orthogonale Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & u & x \\ \frac{2}{3} & v & y \\ \frac{1}{3} & 0 & z \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $u,\ v,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A orthogonal wird. Geben Sie alle vier Möglichkeiten an.

Aufgabe 4.3

Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Geben Sie die Matrizen Q und R einer QR-Zerlegung von A an.

Aufgabe 4.4

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix Q_{21} und eine Spiegelungsmatrix H_1, so dass

$$Q_{21} A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei R_1 und R_2 Rechtsdreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix Q_i und eine Rechtsdreiecksmatrix R_i an, so dass $A = Q_i R_i$.

Aufgabe 4.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.5a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Die Menge aller $n \times n$-Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

(ii) Die Menge aller regulären $n \times n$-Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

4.5b) Die Menge $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ bildet einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

4.5c) Die Vektoren $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem vom $\mathbb{R}^3$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

4.5d) In welchen Fällen bilden die Vektoren kein minimales Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Aufgabe 4.6

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{für } i = j \text{ oder } j = n, \\ a_{ij} = -1 & \text{für } i > j, \\ a_{ij} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ durch $b = Ax$, wobei $x_i = (-1)^i$ für $i = 1, \dots, n$. Lösen Sie mithilfe von MATLAB das Gleichungssystem $Ax = b$ für $n = 10, 20, .., 1000$ jeweils einmal mit der LR-Zerlegung und einmal mit der QR-Zerlegung. Ploten Sie die jeweiligen relativen Fehler der beiden Methoden in der Euklidischen Norm, $\frac{\|x_{lu}(n)-x\|_2}{\|x\|_2}$ und $\frac{\|x_{qr}(n)-x\|_2}{\|x\|_2}$, in einem Bild.

Hinweis: Die Matrix A können Sie mithilfe des Befehls `tril` definieren. Verwenden Sie die Befehle "`lu(A)`" und "`qr(A)`" sowie "\", um die Systeme zu lösen. Fr die Euklidische Norm $\|x\|_2$ nutzen Sie "`norm(x)`". Um zwei Plots in einem Bild zu haben, betrachten Sie "`subplot`".

Aufgabe 4.7

Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei für zwei Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in V$ die Addition $x \oplus y$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in V.$$

Abgabe:

In der Woche vom 21. Oktober 2019 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte geben Sie dem zugeteilten Assistenten die Matlab Aufgaben ausgedruckt ab und reichen Sie diese auch Online ein, wie auf der Webpage beschrieben.