Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 5

Aufgabe 5.1

5.1a) Sei V die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$: $V = \left\{[x, y, 2x+y]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

5.1b) Ist die Menge $W = \left\{[x, 2x+1, x]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.2

Bestimmen Sie in den folgenden zwei Fällen, ob die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.3

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie minimale Erzeugendensysteme im Kern und im Bild jeder dieser Matrizen.

Aufgabe 5.4

Wir betrachten den linearen Raum $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$, d.h., den Raum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Für alle $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir

$$c_j(x) := \cos(jx), \qquad s_j(x) := \sin(jx), \qquad e_j(x) := \exp(\mathrm{i}jx), \tag{5.4.1}$$

wobei hier $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig, sind die Unterräume

$$W_1 := \operatorname{span}\{e_{-k}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_k\} \qquad \text{und} \qquad W_2 := \operatorname{span}\{c_0, \ldots, c_k, s_1, \ldots, s_k\} \tag{5.4.2}$$

von V gegeben. Zeigen Sie, dass $W_1 = W_2$.

Hinweis: Es gilt $\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

Aufgabe 5.5

Gegeben sei der Vektorraum der stetigen Funktionen $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ber $\mathbb{R}$, das ist der Raum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Betrachten wir die drei Funktionen

$$f_1(x) = \sin(x)\,, \quad f_2(x) = \cos(x)\,, \quad f_3(x) = x\,\cos(x)\,.$$

Alle drei Funktionen sind Elemente von V. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhngig in V sind.

Aufgabe 5.6

Multiple Choice: Online abzugeben.

5.6a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + ... + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iii) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iv) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

(vi) Falls die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

5.6b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

5.6c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.7 Spaltenraum und Kern einer Matrix

Geben Sie, sofern möglich, für die nachfolgenden Teilaufgaben jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ an, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt.

5.7a) Eine Basis des Spaltenraums von A ist $\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix} \right\}$ und eine Basis für $\operatorname{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \right\}$.

5.7b) Eine Basis des Spaltenraums von A ist $\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \right\}$ und eine Basis für $\operatorname{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$.

5.7c) Der Spaltenraum von A enthält die Vektoren $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ und eine Basis für $\operatorname{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$.

5.7d) Der Spaltenraum von A ist gleich dem Zeilenraum von A und $\operatorname{Kern}(A)$ wird von den Vektoren $\begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}5\\-2\\-3\end{bmatrix}$ aufgespannt.

Aufgabe 5.8

5.8a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}.$$

5.8b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix}a\\a\\1+a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\b\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}c\\c\\b+c\end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Abgabe:

In der Woche vom 28. Oktober 2019 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webpage beschrieben.