

Serie 6

Aufgabe 6.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

6.1a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

(i) $\mathcal{F} : x \mapsto ax + b$ mit $x, a, b \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

(iii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(iv) $\mathcal{F} : x \mapsto x^2 + 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

(v) $\mathcal{F} : x \mapsto \exp(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

(vi) \mathcal{F} nimmt eine Funktion f aus der Menge der stetigen Funktion von $[0, 1]$ nach \mathbb{R} , notiert als $\mathcal{C}([0, 1])$, und gibt die Funktion $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ in $\mathcal{C}([0, 1])$ zurück.

6.1b) Wir betrachten die Ebene E in \mathbb{R}^3 , gegeben durch $x_2 = x_3$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ senkrecht auf E projiziert. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix A , welche \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(ii) Die Matrix A , welche \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

6.1c) Gegeben ist ein Autokonstruktionsroboter, welcher immer die gleiche Drehung mit einem Stoss durchföhrt, um ein Element in die Karosserie einzufügen. Die dazugehörige lineare Abbildung ist $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow$

\mathbb{R}^3 , die jedes $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ auf $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ abbildet. Nun, der Roboter operiert nicht

bezüglich unserer Standardbasis, sondern bezüglich der Basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix A , welche \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\sqrt{2} \begin{bmatrix} -6.5 & -65 & -12.5 \\ 1.5 & 14 & 2.5 \\ -3.5 & -32 & -5.5 \end{bmatrix}$.

(ii) Die Matrix A , welche \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\sqrt{2} \begin{bmatrix} -16.5 & -7.5 & 17.5 \\ -14.5 & -5.5 & 14.5 \\ -23 & -10 & 24 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 6.2

Sei \mathcal{P}_4 der Raum der Polynome mit Grad strikt kleiner als 4. Die Monome $1, x, x^2, x^3$ bilden eine Basis von \mathcal{P}_4 , aber dies ist natürlich nicht die einzige Basis.

Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^i \text{ für } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von \mathcal{P}_4 bilden.

Aufgabe 6.3 Kern und Bild

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A)$.

Aufgabe 6.4 Koordinatentransformation

Gegeben seien die zwei Basen $\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}$ des \mathbb{R}^3 :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

6.4a) Finden Sie die Basiswechsellmatrix S , welche Koordinaten bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis \mathcal{B} abbildet.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Tatsache, dass die Spalten der Basiswechsellmatrix die Koordinaten der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der "neuen Basis" \mathcal{B} enthalten. Hier müssen Sie lineare Gleichungssysteme lösen, um diese Koordinaten zu bestimmen.

6.4b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis \mathcal{B} .

Aufgabe 6.5 Koordinatentransformation zur geometrischen Interpretation

Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V nach V .

6.5a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation, welche neue Koordinaten in alte überführt.

6.5b) Durch welche Matrix \tilde{A} wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten (in $W = \mathbb{R}^3$ mit der neuen Basis in W) beschrieben?

6.5c) Interpretieren Sie die Abbildung in den ursprünglichen Koordinaten (in V) geometrisch.

Aufgabe 6.6 Matrixdarstellung einer linearen Polynomabbildung

Seien $\mathcal{G}_3 = \text{span}\{1, t^2, t^4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \text{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume. Betrachten Sie die folgende Abbildung \mathcal{A} von \mathcal{G}_3 nach \mathcal{U}_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \mathcal{G}_3 &\longrightarrow \mathcal{U}_2 \\ x &\longmapsto tx'' \end{aligned}$$

6.6a) Zeigen Sie, dass \mathcal{A} eine lineare Abbildung ist.

6.6b) Durch welche Matrix A wird \mathcal{A} beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

6.6c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von \mathcal{G}_3 beziehungsweise \mathcal{U}_2 sind, wobei $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 1 - t^2$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$, $q_1(t) = t$ und $q_2(t) = 3t + 2t^3$.

6.6d) Welches ist die neue Matrix B , die A nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in Teilaufgabe 6.6c) gegeben) beschreibt?

Abgabe:

In der Woche vom 04. November 2019 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der [Webpage](#) beschrieben.