Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

Herbstsemester 2019

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 7

Aufgabe 7.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

7.1a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ auf $\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$ der Vektor $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

(i) richtig

(ii) falsch

7.1b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

(i) richtig

(ii) falsch

7.1c) Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(i) richtig

(ii) falsch

7.1d) Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$.

(i) richtig

(ii) falsch

7.1e) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

(i) richtig

(ii) falsch

7.1f) In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

(i) richtig

(ii) falsch

Aufgabe 7.2 Polynomielle Projektion

In dieser Aufgabe betrachten wir den Polynomraum $\mathcal{P}_d([-1,1])$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich d auf dem Interval $[-1,1]$ für $d \in \mathbb{N}$. Er ist ausgestattet mit dem *Skalarprodukt*

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{P}_d([-1,1]),$$

und der *Monombasis*

$$\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \dots, t \mapsto t^d\}.$$

Weiter seien die linearen Abbildungen $\mathcal{L}_d : \mathcal{P}_d([-1,1]) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathcal{L}_d(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}_d([-1,1]).$$

Schliesslich sind die ersten drei der sogenannten *Legendre-Polynome* gegeben durch

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1).$$

Wir betrachten nun Konzepte, wie sie im Zusammenhang mit der Diskussion linearer Abbildungen in der Vorlesung besprochen worden sind, für diesen Polynomraum.

7.2a) Geben Sie die Matrixdarstellung L von $\mathcal{L}_2$ bezüglich der monomialen Basis von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ und der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ an.

7.2b) Zeigen Sie, dass $\langle P_i, P_i \rangle = 1$ fr $i = \{1, 2, 3\}$ und $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ fr $i \neq j$.

7.2c) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung $\tilde{L}$ von $\mathcal{L}_2$ bezüglich der Basis $\{P_0, P_1, P_2\}$ von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ und der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

7.2d) Der *Rang* einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W ist definiert als die Dimension ihres Bildes $f(V)$ als Unterraum von W (siehe Vorlesung). Er entspricht dem Rang jeder zugehörigen Abbildungsmatrix. Was ist für allgemeines d der Rang von $\mathcal{L}_d$? Begründen Sie Ihre Antwort.

7.2e) Zeigen Sie, dass für $d \geq 2$

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \{t \mapsto 1 - t^2, t \mapsto t(1-t^2), t \mapsto t^2(1-t^2), \ldots, t \mapsto t^{d-2}(1-t^2)\}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathcal{L}_d)$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\dim \mathrm{Kern}(\mathcal{L}_d)$ mithilfe der Dimensionsformel und Teilaufgabe 7.2d). Zeigen Sie dann, dass $\mathcal{B}_{\text{Kern}}$ im Kern enthalten und linear unabhängig ist.

7.2f) Berechnen Sie für die Vektoren $t \mapsto t^n \in \mathcal{P}_d([-1,1])$, $n \in \{0, 1, \ldots, d\}$, die jeweiligen Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{P}_2([-1,1])$, also diejenigen Polynome in $\mathcal{P}_2([-1,1])$, deren Differenz zum ursprnglichen Polynom senkrecht zu $\mathcal{P}_2([-1,1])$, bezglichen dem obigen Skalarprodukt, steht.

Hinweis: Verwenden Sie, dass sich die Orthogonalprojektion wegen dem Resultat aus Teilaufgabe 7.2b) leicht berechnen lassen.

Aufgabe 7.3

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \mathrm{diag}(2, \frac{1}{3})$. Wir definieren $(x, y) := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

7.3a) Zeigen Sie, dass (x, y) in V ein Skalarprodukt definiert.

7.3b) Wie sieht die durch (x, y) induzierte Norm $\|x\|$ aus?

7.3c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 7.4

7.4a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bezüglich des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

7.4b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

bezüglich der in Teilaufgabe 7.4a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, das heisst, es soll gelten

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

7.4c) Lösen Sie Teilaufgabe 7.4a) mit Hilfe der QR-Zerlegung in MATLAB.

Hinweis: In MATLAB liefert der Befehl `[Q,R] = qr(A)` die QR–Zerlegung der Matrix `A`.

Aufgabe 7.5

Sei $V = \mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome auf dem Intervall $[0,1]$ vom Grad strikt kleiner als 3. Auf V ist durch

$$\big\langle p_1(x), p_2(x)\big\rangle := \int_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt gegeben. Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von V, indem Sie das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren $1, x, x^2$ anwenden.

Aufgabe 7.6

Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und $\alpha_n,\ \beta_m > 0$ im Vektorraum $V = C^0([0, 2\pi])$, den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$$

ausstatten.

7.6a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene dieser Funktionen orthogonal sind.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned}
\sin(u)\ \sin(v) &= \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))\\
\cos(u)\ \cos(v) &= \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v))\\
\sin(u)\ \cos(v) &= \tfrac{1}{2}(\sin(u-v) + \sin(u+v))
\end{aligned}$$

7.6b) Wie sind α_n und β_m zu wählen, damit alle diese Funktionen die Norm 1 haben?

Definition: Vektorprodukt *Seien die zwei Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$, $w = (w_1, w_2, w_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ gegeben, so definieren wir das Vektorprodukt $v \times w \in \mathbb{R}^3$ als*

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

Betrachten sie dazu auch die Lektre zur Vektorrechnung von Daniel Stoffer auf der Webpage.

Aufgabe 7.7

7.7a) Berechnen Sie

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

7.7b) Bestimmen Sie mit dem Vektorprodukt einen Normalenvektor der Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (1,1,1) + \lambda(0,2,1) + \mu(-1,2,3),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimmen Sie ausserdem Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a x_1 + b x_2 + c x_3 = d\}.$$

Aufgabe 7.8

7.8a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}$ mit der Geraden $g = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (-2, 1, 3) + \lambda(1, 1, 1)\,, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

7.8b) Geben Sie einen möglichst einfachen Punkt P an, der sowohl auf E_1 als auch auf E_2 liegt, wobei $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

7.8c) Geben Sie mit Hilfe des Vektorprodukts die Richtung der Schnittgeraden von E_1 und E_2 an.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Normalenvektoren von E_1 und E_2.

Aufgabe 7.9

7.9a) Berechnen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts die orthogonale Projektion Q des Punktes $P = (-2, 4, 3)$ auf die Gerade $g = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + \lambda(2, 2, 1)\}$.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze: Auf welchem Vektor muss $\vec{PQ}$ senkrecht stehen?

Aufgabe 7.10

Die drei linearen längenerhaltenden Selbstabbildungen F_1, F_2 und F_3 des $\mathbb{R}^3$ sind wie folgt definiert:

F_1 ist eine Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$.
F_2 ist eine $45°$-Drehung um die x_1-Achse.
F_3 ist eine $30°$-Drehung um die x_2-Achse.

7.10a) Finden Sie die Matrixdarstellungen der linearen Abbildungen $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2$ and F_3 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

7.10b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der hintereinandergeschalteten Abbildungen $\mathsf{F}_2 \circ \mathsf{F}_1$ und $\mathsf{F}_3 \circ \mathsf{F}_2$.

Abgabe:

In der Woche vom 18. November 2019 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webpage beschrieben.