Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

Herbstsemester 2019

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 8

Aufgabe 8.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

8.1a) Sei die QR-Zerlegung der $m \times n$-Matrix A, $m > n$, gegeben mit Q orthogonal und $R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$, wobei $0_{(m-n)\times n}$ eine Null-Matrix bezeichne. Die Spalten von A seien linear abhängig, dann ist die $n \times n$-Matrix R_0

(i) singulär.

(ii) regulär.

(iii) nicht eindeutig regulr, oder singulr.

8.1b) Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalengleichungen

(i) genau eine Lösung.

(ii) unendlich viele Lösungen.

(iii) keine Lösung.

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

x_i	0	1	2
y_i	5.41	5.17	5.93

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung,

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2,$$

minimal wird (lineare Regression).

8.1c) Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

8.1d) Die Matrix der Normalengleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{bmatrix}$

8.1e) Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

(i) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$

(ii) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$

(iii) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

Aufgabe 8.2

Multiple Choice: Online abzugeben.

8.2a) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

8.2b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

8.2c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

(i) $\det M \neq 0$, (ii) $\det M = 0$, (iii) $\det M = \pm 1$.

8.2d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

8.2e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$, (ii) $\det A = \alpha + 2$, (iii) $\det A = -\alpha - 2$.

8.2f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 8.2e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

(i) die leere Menge,

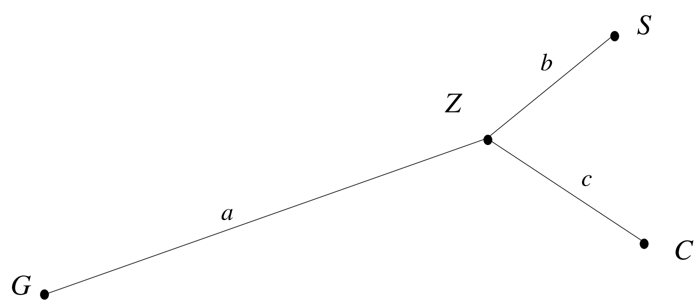
(ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4,$

(iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 8.3

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht.

8.3a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalengleichungen.

8.3b) Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in MATLAB.

8.3c) Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\'-Operator in MATLAB.

Aufgabe 8.4 Orthonormale Basis

Gegeben seien die Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, das heisst, zeigen Sie, dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind (das bedeutet, dass ihre Länge 1 ist, i.e. $\sqrt{\langle v^{(i)}, v^{(i)} \rangle} = 1$, $i = 1, 2, 3$),
- paarweise orthogonal sind
- und eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 8.5

Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8.6

Die Runge-Funktion ist definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5, 5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Wir fordern, dass P_n die Funktion f an m gleichmässig in $[-5, 5]$ verteilten Punkten x_i möglichst gut approximiert und schreiben dies als lineares Ausgleichsproblem der Form

$$Ac = b, \tag{8.6.1}$$

wobei c die $n + 1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

8.6a) Bestimmen Sie die Matrix A und die rechte Seite b.

8.6b) Wie können Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung von A lösen? Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen.

8.6c) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `runge_lstsq.m`, die die Lösung des Ausgleichsproblems (8.6.1) für beliebige m und n mit $m \geq n + 1$ berechnet. Plotten Sie anschliessend mithilfe der Funktion `runge_diff_degrees.m` die Lösung für Grad $2 \leq n \leq 13$ und $m = 20$.

Abgabe:

In der Woche vom 25. November 2019 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webpage beschrieben.