Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

Herbstsemester 2019

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 9

Aufgabe 9.1 Kritischer Vergleich: QR-Algorithmus und Gram-Schmidt-Verfahren

In der Vorlesung haben wir die Householder Transformation verwendet um die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zu bestimmen. Ein weiteres, sehr intuitives Verfahren, das sukzessive die Spalten $a_1, \dots, a_n$ mit $a_i \in \mathbb{R}^m$, von A orthogonalisiert, ist das Gram-Schmidt-Verfahren. Die folgenden Algorithmen (in Pseudo-Code) liefern eine QR-Zerlegung nach dem *Gram-Schmidt-Verfahren* und dem *modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren*:

Gram-Schmidt:

$Q = 0_{m \times m}$
for $j = 1, \dots, n$ **do**
  $v_j = A_{:j}$
  for $i = 1, \dots, j-1$ **do**
    $R_{ij} = Q_{:i}^\top A_{:j}$
    $v_j = v_j - R_{ij} Q_{:i}$
  end for
  $R_{jj} = \|v_j\|_2$
  $Q_{:j} = \frac{v_j}{R_{jj}}$
end for

Modifiziertes Gram-Schmidt:

$V = A$
for $i = 1, \dots, n$ **do**
  $R_{ii} = \|V_{:i}\|_2$
  $Q_{:i} = \frac{V_{:i}}{R_{ii}}$
  for $j = i+1, \dots, n$ **do**
    $R_{ij} = Q_{:i}^\top V_{:j}$
    $V_{:j} = V_{:j} - R_{ij} Q_{:i}$
  end for
end for

- Vervollstndigen Sie die Matlab-Datei `GramSchmidtQR.m`, wie folgt. Initialisieren Sie die Matrix $Z \in \mathbb{R}^{50 \times 50}$ mit den Eintrgen:

$$Z_{ij} = 1 + \min(i, j), \quad 1 \le i, j \le 50$$

- Vergleichen Sie den numerischen Fehler der beiden Gram-Schmidt-Verfahren als auch der Matlab-internen QR-Zerlegung, welche mittels der Householder Transformation arbeitet, in Bezug auf die Orthogonalitt der Spalten von Q. Nutzen Sie dazu die zwei Matlab Funktionen `GR.m` und `GRmod.m`, welche im Template enthalten sind, und auch die Matlab Funktion `qr(...)`. Den Fehler berechnen wir durch den maximalen Eintrag in $|Q^\top Q - I|$, wobei I die 50×50 - Identittsmatrix beschreibt.

- Plotten Sie den logarithmischen Fehler $\log(|Q^\top Q - I|)$, fr alle drei Methoden.

Aufgabe 9.2 Matrixpotenzen

In der Vorlesung haben wir allgemein die Konzepte "lineare Unabhängigkeit" und "Basis" in Vektorräumen betrachtet. Die meisten Beispiele bezogen sich allerdings auf den $\mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe werden wir uns mit linear abhängigen Matrizen beschäftigen.

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

und Ihre Potenzen A^k, $k \in \mathbb{N}_0$, die das k-fache Produkt von A mit sich selbst bezeichnen. Es gilt die Konvention $A^0 := I_2$.

Wir definieren

$$M_k := \operatorname{span}\{A^0, A^1, \ldots, A^k\}\ , \quad k \in \mathbb{N}\ .$$

$$B_k := \{A^0, A^1, \ldots, A^k\}\ , \quad k \in \mathbb{N}\ .$$

9.2a) Mit welchem Argument kann man sofort und ohne Rechnung begründen, dass die Menge B_3 linear abhängig ist?

9.2b) Zeigen Sie, dass auch die Menge B_2 linear abhängig ist.

9.2c) Geben Sie eine Basis von M_2 an.

Hinweis: Verwenden Sie die Aussage, die in 9.2b) zu zeigen war.

9.2d) Was ist $\dim M_3$?

9.2e) Was ist die Dimension von M_k für beliebiges k?

Aufgabe 9.3

9.3a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, das heisst, bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

9.3b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

9.3c) Überprüfen Sie Ihr Resultat von Teilaufgaben 9.3a) und 9.3b) in MATLAB.

Hinweis: `[V,D] = eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix `C` in der Diagonalen von `D` und zugehörige Eigenvektoren in den Spalten von `V` zurück.

Aufgabe 9.4

Sei A die 3×3-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9.4a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der MATLAB Funktion `eig`.

9.4b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

9.4c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x Folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 9.5

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.5a) Diagonalisieren Sie die Matrix, das heisst, bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

9.5b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $\dot{z} = az$ ist gegeben durch $z(t) = ce^{at}$ mit einer Konstanten c. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = ce^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z_0 = z(0) = c$ bestimmt werden kann.

9.5c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9.5d) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Aufgabe 9.6 Die Spur diagonalisierbarer Matrizen

In dieser Aufgabe lernen wir eine spezielle Funktion auf dem Raum der quadratischen Matrizen kennen, die *Spur*. Sie steht in enger Beziehung zum Spektrum einer Matrix.

Die Spur einer quadratischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\operatorname{Spur} M := \sum_{j=1}^{n} (M)_{j,j}\,. \tag{9.6.1}$$

9.6a) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$U := \left\{ M \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, \operatorname{Spur} M = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

Hinweis: Sie können U als Kern einer “Matrix” charakterisieren. Dann sieht man, dass diese Matrix nur ein Zeilenvektor ist.

9.6b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Spur} BC = \operatorname{Spur} CB\,, \quad \forall\, B,\, C \in \mathbb{R}^{n\times n}\,. \tag{9.6.2}$$

9.6c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, mit

$$A = S\,\underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n)}_{=:D}\,S^{-1}\,, \tag{9.6.3}$$

wobei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,. \tag{9.6.4}$$

Bemerkung: Die Identität (9.6.4) bietet ein nützliches Hilfsmittel zur Überprüfung der Korrektheit von berechneten Eigenwerten.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe 9.6b).

Abgabe:

In der Woche vom 02. Dezember 2019 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte reichen Sie die MATLAB Aufgaben Online ein, wie auf der Webpage beschrieben.