Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler Herbstsemester 2019 ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 11

Aufgabe 11.1

11.1a) Für $\phi \in [0, 2\pi]$ seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie jeweils eine Singulärwertzerlegung von A, B und C.

11.1b) Lösen Sie Teilaufgabe 11.1a) für $\phi = \frac{\pi}{4}$ mit MATLAB.

Hinweis: Um eine Singulärwertzerlegung zu berechnen, kann man die Funktion `svd` benutzen.

Aufgabe 11.2

Es sei die Fibonacci-Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11.2a) Bestimmen Sie die Eigenwerte (σ_1, σ_2) und Eigenvektoren der Länge eins zu den Matrizen $A^T A$ (Eigenvektoren u_1, u_2) und AA^T (Eigenvektoren v_1, v_2).

11.2b) Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl der Eigenvektoren in der ersten Teilaufgabe $Av_1 = \sigma_1 u_1$ und $Av_2 = \sigma_2 u_2$ gilt.

Hinweis: Die folgende Gleichung könnte für Teil-Aufgabe b) von Nutzen sein:

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 11.3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.3a) Berechnen Sie AA^T, sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren mit Länge eins. Bestimmen Sie damit eine orthonormale Matrix V für die SVD-Zerlegung von A.

11.3b) Berechnen Sie A^TA, sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren mit Länge eins. Bestimmen Sie damit eine orthonormale Matrix U für die SVD-Zerlegung von A.

11.3c) Bestimmen Sie orthonormal Matrizen U, V und eine Matrix Σ, so dass $A = U\Sigma V^T$ ist. Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass das Produkt der drei Matrizen $U\Sigma V^T$ wieder A ergibt.

Aufgabe 11.4

11.4a) Es seien $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasen für den $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Matrix A, welche jeden Vektor $v_j \mapsto u_j$ abbildet; also so dass $Av_1 = u_1, \ldots, Av_n = u_n$ ist.

11.4b) Konstruieren Sie die Matrix A mit Rang eins, so dass $Av = 12u$ gilt, wobei $v = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ und $u = \frac{1}{3}(2,2,1)$ seien. Bestimmen Sie auch die Singulär<u>werte</u> von A.

11.4c) Erklr̈en Sie, wieso die Singulärwertzerlegung eine Matrix A als Summe von r Matrizen vom Rang eins darstellt:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T.$$

Aufgabe 11.5

11.5a) Es sei A eine symmetrische 2×2-Matrix mit den Eigenvektoren u_1 und u_2 (mit Länge eins). Welche Matrizen U, Σ und V^T erhalten Sie in der Singulärwertzerlegung, wenn die Eigenwerte von A $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ sind?

11.5b) Gilt $A = QR$ mit einer orthonormalen Matrix Q, so stimmt die Singulärwertzerlegung von A beinahe mit derjenigen von R überein. Welche der drei Matrizen ändert sich, wenn man von R zu $A = QR$ übergeht?

11.5c) Wie äussert es sich in der Singulärwertzerlegung, wenn man A durch $4A$ austauscht?

11.5d) Bestimmmen Sie die Singulärwertzerlegung von A^T und A^{-1}, gegeben der Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ einer Matrix A.

11.5e) Warum steht in der SVD von $A + I$ nicht einfach $\Sigma + I$?

Aufgabe 11.6

11.6a) Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, lösen Sie das Ausgleichungsproblem

$$Ac = b,$$

für

$$A = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

11.6b) Lösen Sie **a)** mit MATLAB.

Abgabe:

Diese Serie wird nicht korrigiert, und muss deshalb nicht beim Übungsassistenten abgegeben werden. Diese Serie wird Ihnen auch ohne Abgabe für den Bonus an der Prüfung angerechnet.