Serie 4 - Bonusaufgabe

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt am **Freitag, den 18. Oktober** in Ihrer Übungsstunde. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

1.

(a) Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob

(i) das Matrixprodukt IG gleich dem Matrixprodukt GI ist oder nicht.

(ii) das Matrixprodukt DH gleich dem Matrixprodukt HD ist oder nicht.

(iii) das Matrixprodukt DF gleich dem Matrixprodukt FD ist oder nicht.

(iv) das Matrixprodukt DG gleich dem Matrixprodukt GD ist oder nicht.

(v) das Matrixprodukt GH gleich dem Matrixprodukt HG ist oder nicht.

Begründen Sie alle Ihre Entscheidungen. Vergleichen Sie Ihre Resultate: Für welche der obigen Matrizenpaare gilt die Gleichheit der Matrixprodukte, für welche gilt sie nicht? Versuchen Sie, Ihre Beobachtungen zu verallgemeinern: Gibt es eine Matrix A, sodass für jede beliebige Matrix B stets $AB = BA$ gilt? Falls ja, geben Sie ein Beispiel für eine solche Matrix. Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie ein konkretes Beispiel für eine Matrix B, welche die Gleichung $AB = BA$ erfüllt (B soll dabei weder die Nullmatrix noch die Identitätsmatrix sein). Finden Sie andererseits ein konkretes Beispiel für eine Matrix C, für welche $AC \neq CA$ gilt.

(c) Seien E, F, G, H beliebige reelle 2×2 Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für <u>alle</u> Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $EFG + EFG = 2EFG$

(ii) $EFG + EGF = 2EFG$

(iii) $G(H + E) = GE + GH$

(iv) $EFEFG + FEEFG + E^2F^2G = 3E^2F^2G$

(v) $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$

(vi) $(GH)^2 = G^2H^2$

Serie 4

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 25. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $(AB)^T = A^T B^T$.

(b) $(AB)^T = B^T A^T$.

(c) $A^T A$ ist symmetrisch.

(d) AA^T ist symmetrisch.

(e) Ist C eine beliebige quadratische Matrix, so ist $C + C^T$ symmetrisch.

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:
$AB,\ BA,\ Ax,\ A^2 := AA,\ B^2 := BB,\ y^T x,\ yx,\ xy^T,\ B^T y,\ y^T B.$

b) Lösen Sie a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

3. *Polynominterpolation:*
Gegeben sind die Funktionswerte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ über den Abszissen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Gesucht ist das interpolierende Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Es soll also gelten

$$p(x_i) = y_i, \quad \text{für} \quad 0 \le i \le n.$$

a) Man bestimme das Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in Matrixschreibweise.

b) Man bestimme das Interpolationspolynom für

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	1	0	2	0

$(n = 4)$.

c) Man betrachte die Polynome

$$\ell_i(x) := \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Welche Werte nimmt ℓ_i in den Punkten x_k an? Man bestimme die Lösung von b) mit Hilfe der Polynome ℓ_i (Lagrangesche Interpolationsformel).

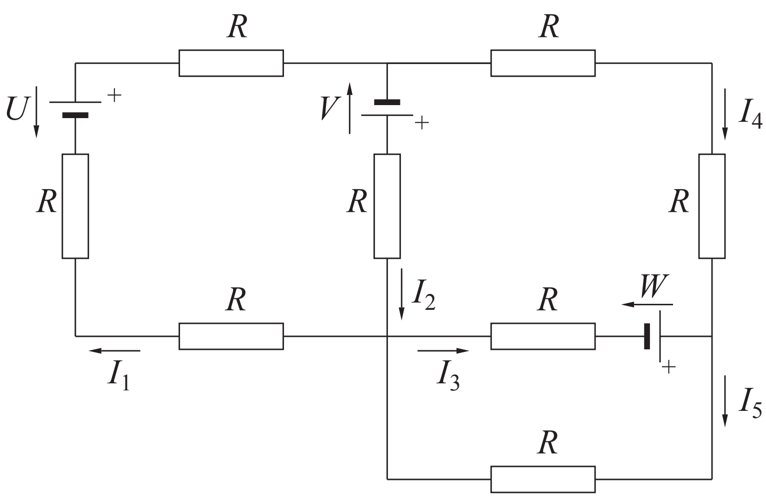
4. *Kirchhoffsche Regeln:*
Für elektrische Stromkreise gelten die folgenden Regeln:

- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null.
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die fünf Teilströme des skizzierten Gleichstromkreises und lösen Sie es für

$$R = 300\Omega, \quad U = V = 300V, \quad W = 200V.$$

Hinweis: Wählen Sie die Vorzeichen entsprechend den Zählpfeilen!


R
R
U
+
V
+
I4
R
R
R
R
R
W
I2
+
I1
I3
I5
R