Serie 6 - Bonusaufgabe

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt am **Freitag, den 1. November** in Ihrer Übungsstunde. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

---

1. Betrachten Sie die Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das Vektorprodukt $a \times b$. Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die Reihenfolge der Vektoren a und b beim Vektorprodukt vertauscht wird, wenn also $b \times a$ statt $a \times b$ berechnet wird? Erklären Sie.

(b) Welche z-Komponente hat das Vektorprodukt $a \times b$?

(c) Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die z-Komponente des Vektorprodukts Null ist? Erklären Sie.

(d) Visualisieren Sie die folgenden Vektorenpaare graphisch:

(i) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die z-Komponente des Vektorprodukts des jeweiligen Vektorenpaars Null ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Betrachten Sie das Parallelogramm, welches von den Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

(a) Berechnen Sie die Fläche dieses Parallelogramms. Drücken Sie die Fläche mit Hilfe der Komponenten von a und b aus. Tipp: Nehmen Sie die Skizze unten zur Hilfe.

(b) Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die Fläche des Parallelogramms Null ist? Erklären Sie.

(c) Visualisieren Sie die folgenden Vektorpaare graphisch:

(i) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

(ii) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die Fläche des Parallelogramms, welches vom jeweiligen Vektorenpaar aufgespannt wird, Null ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.

(d) Welchen Einfluss hat es auf die Flächenberechnung des Parallelogramms, wenn die Reihenfolge der Vektoren a und b vertauscht wird? Erklären Sie.

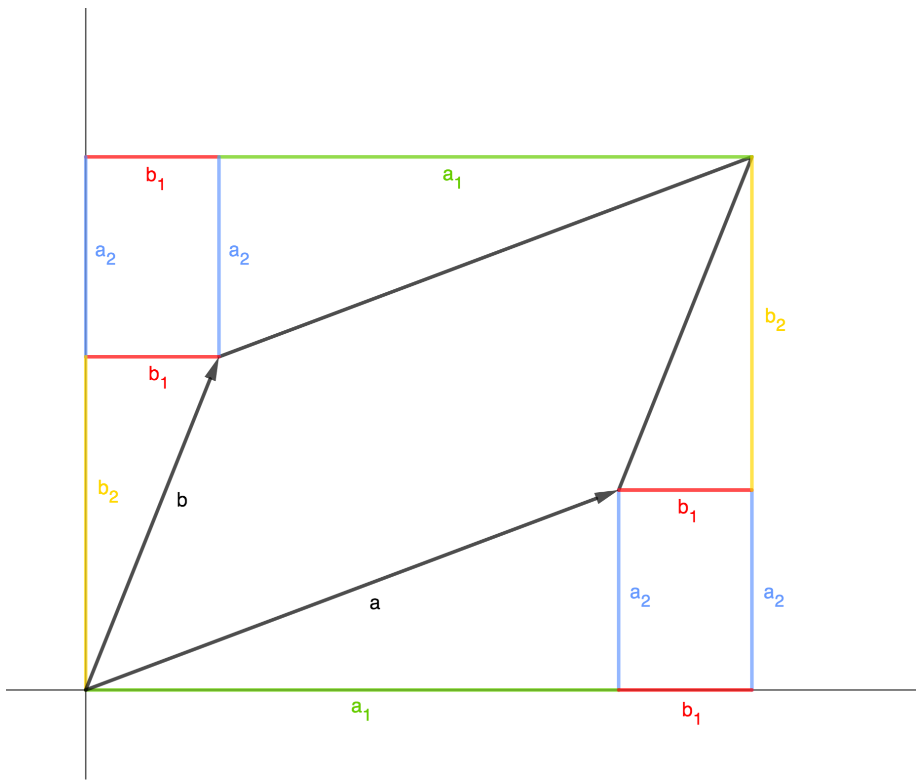

Abbildung 1: Skizze eines Parallelogramms.

3. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = c$, welches durch

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Erinnern Sie sich daran, dass mithilfe des Gaussverfahrens dieses System in das äquivalente lineare Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{c}$ umgeformt werden kann, wobei

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 - a_2 \frac{b_1}{a_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 - a_2 \frac{c_1}{a_1} \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und finden Sie Ausdrücke für x_1 und x_2 in Abhängigkeit von den Matrixeinträgen von A und den Vektorkomponenten von c.

(b) Welche Kriterien müssen die Matrixeinträge von A und die Vektorkomponenten von c erfüllen, damit...

  (i) ... das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

  (ii) ... das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat?

  (iii) ... das Gleichungssystem keine Lösung hat?

  Begründen Sie Ihre Antworten.

(c) Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und denken Sie über die Bedeutung der jeweiligen Gleichungen nach. Bestimmen Sie für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ohne es zu lösen, ob es eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung hat. Begründen Sie Ihre Antworten.

  (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

  (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

  (iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. Vergleichen Sie Ihre Resultate aus den Aufgaben 1b, 2a und 3a. Was beobachten Sie?

Serie 6

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 8. November um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei A symmetrisch und regulär. Dann ist auch A^{-1} symmetrisch.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau für $a = \pm\sqrt{3/2}$ orthogonal.

(c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

2.

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A regulär ist.

b) Für welche Werte des Parameters γ ist

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

3. Sei $\mathbb{I}_2$ die $2 \times 2-$Einheitsmatrix und $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$.

a) Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix $V := \mathbb{I}_2 - \alpha u\, u^T$ orthogonal?

b) Lösen Sie für die in a) ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$V\, x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

c) Kontrollieren Sie a) und b) mit MATLAB.

4. Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a) Für welche a, b, c, d ist A regulär?

b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelten Werte von a, b, c, d die Inverse A^{-1}.