Lineare Algebra I

Bonusaufgabe 1

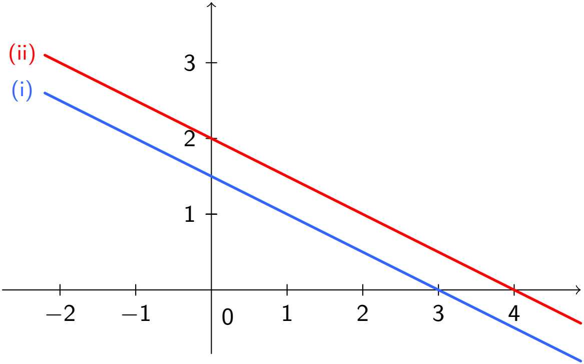
Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme. Denken Sie für jedes dieser Systeme über den Informationsgehalt der einzelnen Gleichungen nach: Entscheiden Sie, ohne das System zu lösen, für jedes Gleichungssystem, ob es eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen, oder keine Lösung hat.

(a)
$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad x_1 + 2x_2 = 3 \\ &\text{(ii)} \quad x_1 + 2x_2 = 4 \end{aligned}$$

Gleichung (i) widerspricht (ii). Die Lösungsmenge ist leer.

(a) $$\begin{array}{rl} \text{(i)} & x_1 + 2x_2 = 3 \\ \text{(ii)} & x_1 + 2x_2 = 4 \end{array}$$

Geometrisch:



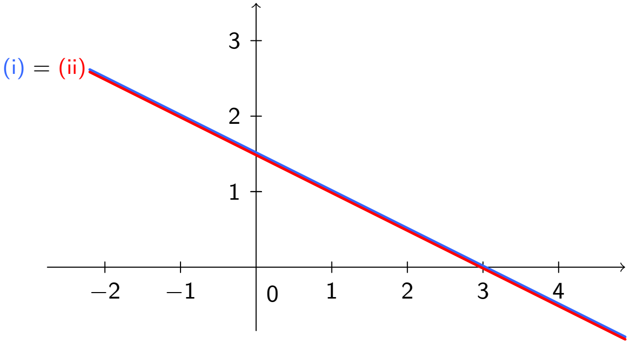
Kein Punkt liegt gleichzeitig auf beiden Geraden.

(b)
$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & x_1 + 2x_2 = 3 \\ \text{(ii)} & x_1 + 2x_2 = 3 \end{array}$$

Die Gleichungen stimmen überein: Es gibt unendliche viele Lösungen, da man (i) für jeden Wert von x_2 nach x_1 auflösen kann.

(b) $\quad$ (i) $\; x_1 + 2x_2 = 3$
$\quad\quad$ (ii) $\; x_1 + 2x_2 = 3$

Geometrisch:



Die beiden Geraden sind identisch: Jeder Punkt (x_1, x_2) auf der Gerade löst (i) und (ii).

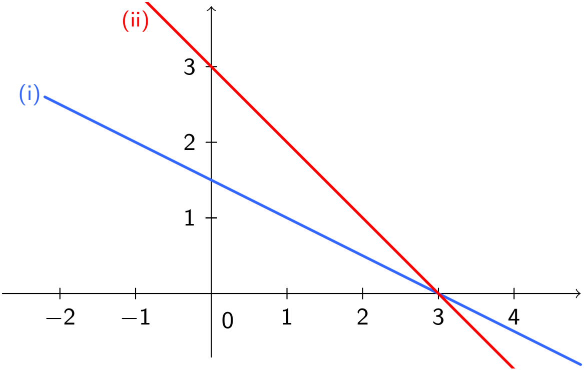
Dieses LGS hat also je nach rechter Seite keine oder unendlich viele Lösungen.

(c)
$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & x_1 + 2x_2 = 3 \\ \text{(ii)} & x_1 + x_2 = 3 \end{array}$$

Bei der Subtraktion der Gleichungen entsteht eine Gleichung für x_2 allein, mit einer eindeutigen Lösung. Danach folgt aus (i) oder (ii) eine eindeutige Lösung auch für x_1.
Dies gilt bei beliebiger rechter Seite!

(c) $$\begin{array}{ll} \text{(i)} & x_1 + 2x_2 = 3 \\ \text{(ii)} & x_1 + x_2 = 3 \end{array}$$

Geometrisch:



Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt (x_1, x_2), der Lösung des LGS.

(d)

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(i)} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \text{(ii)} & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ \text{(iii)} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Die Gleichung (ii) folgt durch Verdoppeln aus (i) und kann daher weggelassen werden. Dann kann man x_1 beliebig wählen und es resultiert dieselbe Situation wie in (c): In Abhängigkeit von x_1 erhält man eine Lösung für x_2 und x_3. D.h. man hat eine einparametrige Lösungsschar.

(e)

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{(i)} & 2x_1 & + & x_2 & & & = & 4 \\ \text{(ii)} & & & & & 2x_3 & = & 8 \\ \text{(iii)} & 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 5 \end{array}$$

Gleichung (ii) liefert einen festen Wert für x_3. Die Gleichungen (i) und (iii) widersprechen sich nicht und haben eine eindeutige Lösung: Addiere das -2-fache von (i) zu (iii) um x_1 zu bestimmen. Dann folgt x_2 aus (i) oder (iii). Das LGS hat unanhängig von der rechten Seite eine eindeutige Lösung.

(f)
$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(i)} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ \text{(ii)} & 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 4 \\ \text{(iii)} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array}$$

Gleichung (ii) und damit das ganze LGS hat keine Lösung.

Wäre die 4 eine 0, so gäbe es unendlich viele Lösungen: (i) und (iii) liefern dann für jeden Wert von x_3 eine Lösung x_1, x_2 (einparametrige Lösungsschar).
Das LGS hat also je nach rechter Seite keine oder unendlich viele Lösungen.

(g)
$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(i)} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ \text{(ii)} & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \text{(iii)} & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

Die Summe aus (i) und (ii) widerspricht (iii). Die Lösungsmenge ist leer.

Wäre die 8 eine 6, könnte man (iii) weglassen. Da (ii) durch Verdoppeln aus (i) entsteht, kann man auch (ii) weglassen. (i) kann dann z. B. nach x_1 aufgelöst werden, wobei x_2 und x_3 frei wählbar sind. Man bekommt eine zweiparametrige Lösungsschar.

Beobachtung: Je nach Koeffizientenmatrix A des LGS $Ax = b$ gilt:

- Entweder das LGS hat unabhängig von b eine eindeutige Lösung, oder
- Das LGS hat, abhängig von b, keine oder eine ein- oder mehrparametrige Lösung.

Frage: Wie kann man es der Matrix A respektive b ansehen, welcher Fall vorliegt?