Lineare Algebra I
Bonusaufgabe 2

1a) Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die beiden Gleichungen des Systems als Geradengleichungen und zeichnen Sie diese Geraden in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie zudem auch die Lösungsmenge des Gleichungssystems in das Koordinatensystem ein.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} 4x_1 &+ 2x_2 &= 8 \\ x_1 &+ x_1 &= 3 \end{aligned}$$

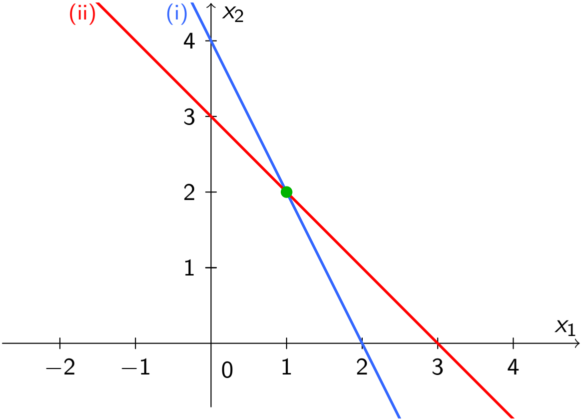
Gekürzt:

$$\begin{aligned} 2x_1 &+ x_2 &= 4 \\ x_1 &+ x_1 &= 3 \end{aligned}$$

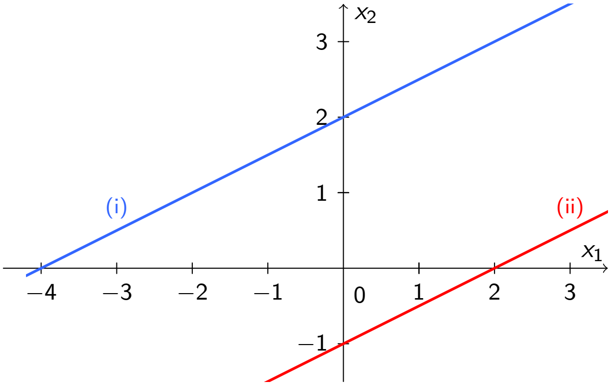
Gerade g mit der Gleichung $2x_1 + x_2 = 4$ zeichnen. Varianten:

- Auflösen nach x_2: $x_2 = 4 - 2x_1$
  Caveat: Geht nur, wenn der Koeffizient von x_2 nicht Null ist.
- Achsenabschnittsform: $\dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{4} = 1$
  Caveat: Geht nur, wenn die rechte Seite und die Koeffizienten nicht Null sind.
- Hessesche Normalform: g ist senkrecht zum Vektor $\binom{2}{1}$ und hat orientierten Abstand $4/\sqrt{5}$ vom Ursprung.
  Vorteil: Geht immer.

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{(i)} & 2x_1 & + & x_2 & = & 4 \\
\text{(ii)} & x_1 & + & x_2 & = & 3
\end{array}
$$



1b) Geben Sie das lineare Gleichungssystem an, dessen geometrische Darstellung unten eingezeichnet ist.



Wir lesen ab (Achsenabschnitt, Steigung):

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & x_2 & = & 2 + \frac{x_1}{2} \\ \text{(ii)} & x_2 & = & -1 + \frac{x_1}{2} \end{array}$$

Umformen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & x_1 - 2x_2 & = & -4 \\ \text{(ii)} & x_1 - 2x_2 & = & 2 \end{array}$$

1c) Geben Sie ein eigenes Beispiel für ein 2×2 lineares Gleichungssystem, welches unendlich viele Lösungen besitzt. Zeichnen Sie zudem dessen geometrische Darstellung in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

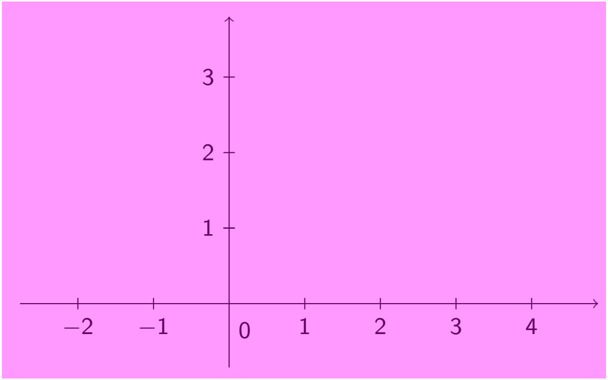
$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ \text{(ii)} & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{array}$$

Geometrisch (zweiparametrige Lösungsschar):

1c) Geben Sie ein eigenes Beispiel für ein 2×2 lineares Gleichungssystem, welches unendlich viele Lösungen besitzt. Zeichnen Sie zudem dessen geometrische Darstellung in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ \text{(ii)} & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{array}$$

Geometrisch (zweiparametrige Lösungsschar):



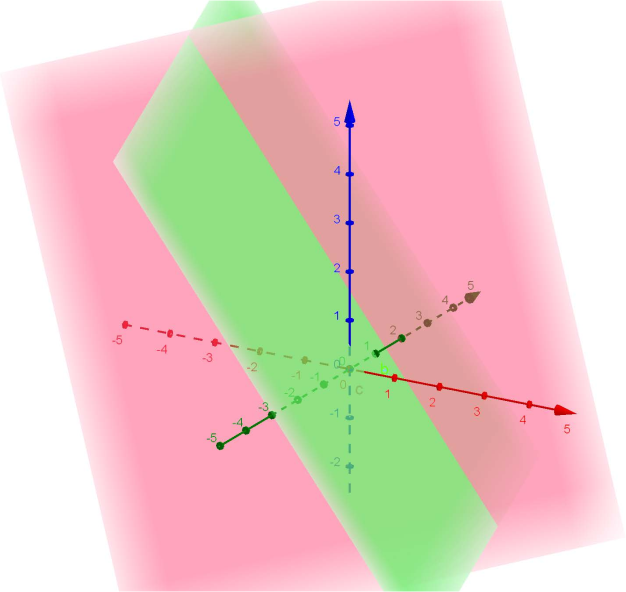
2. Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme der Form $Ax = c$. Verbinden Sie jedes dieser Gleichungssysteme mit dessen geometrischer Interpretation (ohne dass Sie die Gleichungssysteme vorab graphisch darstellen):

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ \text{(ii)} & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ \text{(iii)} & 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{array}$$

Die Gleichung (ii) folgt durch Verdoppeln aus (i). Daher stellen (i) und (ii) dieselbe Ebene dar.

Der rote Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zum blauen Normalenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die zwei Ebenen schneiden sich also.

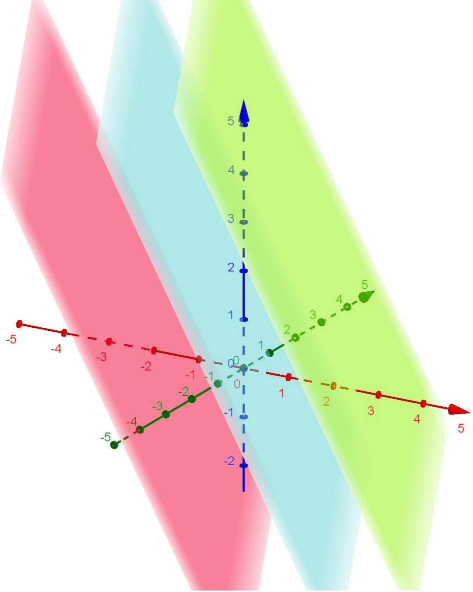


1 2 3 4 5
-1 -2
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
b
c

2b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcr} \text{(i)} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ \text{(ii)} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 5 \\ \text{(iii)} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & -4 \end{array}$$

Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stimmen überein, die drei Ebenen sind also parallel. Ihre orientierten Abstände vom Ursprung sind $1/\sqrt{6}$, $5/\sqrt{6}$, und $-4/\sqrt{6}$.

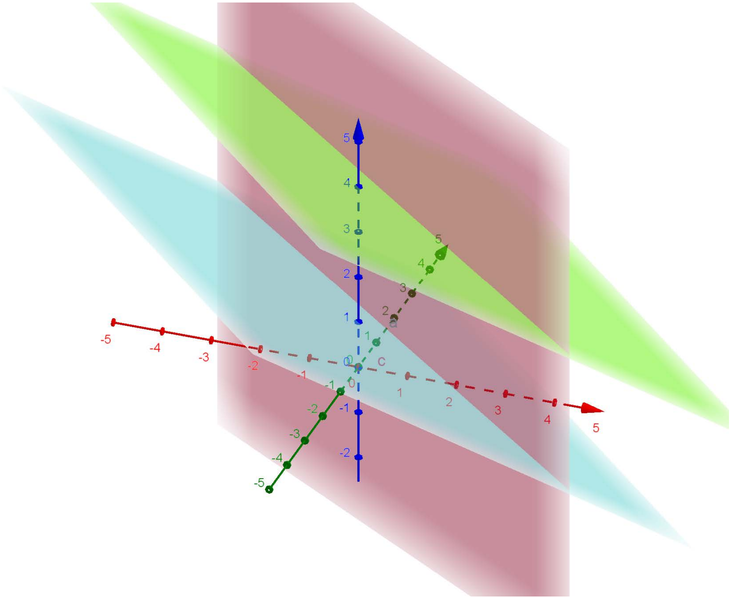

5
4
3
2
1
0
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

2c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ \text{(ii)} & 2x_1 + 3x_2 & = & 3 \\ \text{(iii)} & x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 8 \end{array}$$

Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ stimmen überein, diese zwei Ebenen sind also parallel. Ihre orientierten Abstände vom Ursprung sind $2/\sqrt{6}$, und $8/\sqrt{6}$.

Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zum blauen resp. grünen Normalenvektor: Die rote Ebene schneidet also die beiden parallelen Ebenen.

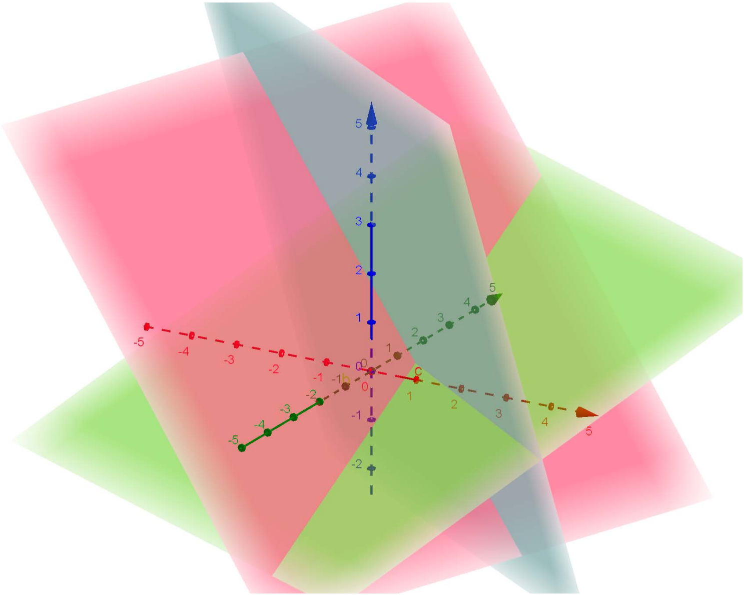


-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-2 -1 0 1 2 3 4 5
a
c

2d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{llcl} \text{(i)} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 3 \\ \text{(ii)} & x_1 + 2x_2 - 5x_3 & = & 1 \\ \text{(iii)} & 3x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind paarweise nicht parallel. Sie liegen nicht in einer Ebene. Die drei Ebenen schneiden sich daher in einem Punkt.


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
b
c