Lineare Algebra I
Bonusaufgabe 3 (in Serie 4)

1.(a) Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Entscheiden Sie, ob das Matrixprodukt IG gleich dem Matrixprodukt GI ist oder nicht.

$$IG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = G$$

$$GI = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = G$$

Bemerkung: Es gilt ja allgemein für jede 2×2-Matrix A

$$IA = A = AI$$

(ii) Entscheiden Sie, ob das Matrixprodukt DH gleich dem Matrixprodukt HD ist oder nicht.

$$DH = 3IH = 3HI = H(3I) = HD$$

(ii) Entscheiden Sie, ob das Matrixprodukt DH gleich dem Matrixprodukt HD ist oder nicht.

$$DH = 3IH = 3HI = H(3I) = HD$$

Dabei ist es vollkommen Wurst, was H für eine 2×2 Matrix ist. Deshalb gilt genau so bei (iii) und (iv):

(ii) Entscheiden Sie, ob das Matrixprodukt DH gleich dem Matrixprodukt HD ist oder nicht.

$$DH = 3IH = 3HI = H(3I) = HD$$

Dabei ist es vollkommen Wurst, was H für eine 2×2 Matrix ist. Deshalb gilt genau so bei (iii) und (iv):

$$DF = FD$$

Und nochmal genauso:

$$DG = GD$$

(ii) Entscheiden Sie, ob das Matrixprodukt DH gleich dem Matrixprodukt HD ist oder nicht.

$$DH = 3IH = 3HI = H(3I) = HD$$

Dabei ist es vollkommen Wurst, was H für eine 2×2 Matrix ist. Deshalb gilt genau so bei (iii) und (iv):

$$DF = FD$$

Und nochmal genauso:

$$DG = GD$$

Auch die Zahl 3 spielt keine Rolle: Für jede Matrix $D := \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und jede 2×2-Matrix A gilt $DA = AD = \lambda A$.

(v) Und hier? Entscheiden Sie, ob das Matrixprodukt GH gleich dem Matrixprodukt HG ist oder nicht.

$$GH = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 9 \\ 36 & 6 \end{pmatrix}$$

$$HG = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 28 & 30 \end{pmatrix}$$

D.h. in diesem Beispiel gilt $GH \neq HG$.

(v) Und hier? Entscheiden Sie, ob das Matrixprodukt GH gleich dem Matrixprodukt HG ist oder nicht.

$$GH = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 9 \\ 36 & 6 \end{pmatrix}$$

$$HG = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 28 & 30 \end{pmatrix}$$

D.h. in diesem Beispiel gilt $GH \neq HG$.

Und wenn ein Faktor eine Diagonalmatrix ist?

$$GF = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$FG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Also auch $GF \neq FG$.

(v) Und hier? Entscheiden Sie, ob das Matrixprodukt GH gleich dem Matrixprodukt HG ist oder nicht.

$$GH = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 9 \\ 36 & 6 \end{pmatrix}$$

$$HG = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 28 & 30 \end{pmatrix}$$

D.h. in diesem Beispiel gilt $GH \neq HG$.

Und wenn ein Faktor eine Diagonalmatrix ist?

$$GF = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$FG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Also auch $GF \neq FG$.
Beachte den Spalten- und Zeilenstruktursatz!

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie ein konkretes Beispiel für eine Matrix B, welche die Gleichung $AB = BA$ erfüllt (B soll dabei weder die Nullmatrix noch die Identitätsmatrix sein). Finden Sie andererseits ein konkretes Beispiel für eine Matrix C, für welche $AC \neq CA$ gilt.

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie ein konkretes Beispiel für eine Matrix B, welche die Gleichung $AB = BA$ erfüllt (B soll dabei weder die Nullmatrix noch die Identitätsmatrix sein). Finden Sie andererseits ein konkretes Beispiel für eine Matrix C, für welche $AC \neq CA$ gilt.

Wie oben gesehen, gilt für $B = \lambda I$ (für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $AB = BA$.

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie ein konkretes Beispiel für eine Matrix B, welche die Gleichung $AB = BA$ erfüllt (B soll dabei weder die Nullmatrix noch die Identitätsmatrix sein). Finden Sie andererseits ein konkretes Beispiel für eine Matrix C, für welche $AC \neq CA$ gilt.

Wie oben gesehen, gilt für $B = \lambda I$ (für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $AB = BA$.

Und für die Matrix $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ gilt $AF \neq FA$.

Allgemein: Sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Damit $AB = BA$ gilt, d.h. $AB - BA = 0$, muss gelten

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a + 3b \\ c & 2c + 3d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2c & 2d - 2b - 2a \\ 2c & -2c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir lesen die Lösung dieses LGS mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten sofort ab

$$c = 0, d = a + b$$

wobei a und b freie Parameter sind. Also

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a + b \end{pmatrix}$$

(c) Seien E, F, G, H beliebige reelle 2×2-Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für alle Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(c) Seien E, F, G, H beliebige reelle 2×2-Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für <u>alle</u> Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $EFG + EFG = 2EFG$ gilt allgemein:

$$(EFG + EFG)_{ij} = (EFG)_{ij} + (EFG)_{ij} = 2(EFG)_{ij} = (2EFG)_{ij}$$

(ii) $EFG + EGF = 2EFG$ ist äquivalent (subtrahiere EFG) zu $EGF = EFG$. Mit $E = I$ müsste gelten $GF = FG$, das ist aber im allgemeinen falsch.

(iii) $G(H+E) = GE + GH$ ist korrekt:

$$G(H+E) \overset{\text{Distributiv-}}{\underset{\text{gesetz}}{=}} GH + GE \overset{\text{Kommutativ-}}{\underset{\text{gesetz}}{=}} GE + GH$$

(iv) $EFEFG + FEEFG + E^2F^2G = 3E^2F^2G$ ist im Allgemeinen falsch, sogar für $G = I$:

$EFEF + FEEF = 2E^2F^2$. Dies ist z.B. für $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ falsch. Dann gilt nämlich $E^2 = F^2 = 0$, aber $EF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (EF)^2 \neq 0$.

(v) $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$ ist richtig, denn

(v) $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$ ist richtig, denn

$$EGHH + EGGH \overset{\text{Distributiv-}}{\underset{\text{gesetz}}{=}} (EGH + EGG)H = (EGH + EG^2)H$$

(vi) $(GH)^2 = G^2 H^2$ ist im Allgemeinen falsch.

(vi) $(GH)^2 = G^2H^2$ ist im Allgemeinen falsch.

Wie gesehen, z.B. für $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $(GH)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aber $G^2H^2 = 0$.