Lineare Algebra I

Bonusaufgabe 4 (in Serie 6)

1. Betrachten Sie die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Vektorprodukt von a und b. Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die Reihenfolge der Vektoren a und b beim Vektorprodukt vertauscht wird, wenn also $b \times a$ statt $a \times b$ berechnet wird?

(b) Welche z-Komponente hat das Vektorprodukt $a \times b$?

1(a), (b) Berechnen Sie das Vektorprodukt von a und b:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

1(a), (b) Berechnen Sie das Vektorprodukt von a und b:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

1(a), (b) Berechnen Sie das Vektorprodukt von a und b:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

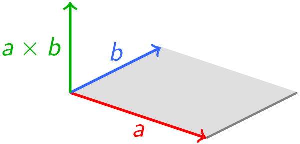
Dieses Vektorprodukt zeigt in Richtung der (positiven oder negativen) z-Achse, denn es steht senkrecht auf den Faktoren a und b, die in der xy-Ebene liegen.

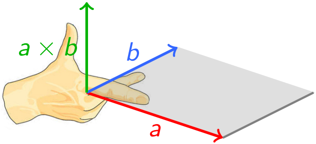
1(a), (b) Berechnen Sie das Vektorprodukt von a und b:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Dieses Vektorprodukt zeigt in Richtung der (positiven oder negativen) z-Achse, denn es steht senkrecht auf den Faktoren a und b, die in der xy-Ebene liegen.

Die z-Komponente ist gleich $a_1 b_2 - a_2 b_1$. Die Länge von $a \times b$, also der Betrag der z-Komponente, ist der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms. $(a, b, a \times b)$ ist ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel).



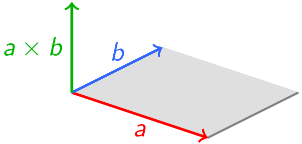


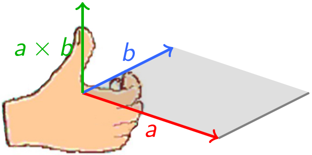
1(a), (b) Berechnen Sie das Vektorprodukt von a und b:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

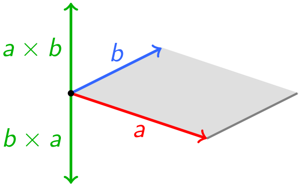
Dieses Vektorprodukt zeigt in Richtung der (positiven oder negativen) z-Achse, denn es steht senkrecht auf den Faktoren a und b, die in der xy-Ebene liegen.

Die z-Komponente ist gleich $a_1 b_2 - a_2 b_1$. Die Länge von $a \times b$, also der Betrag der z-Komponente, ist der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms. $(a, b, a \times b)$ ist ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel).



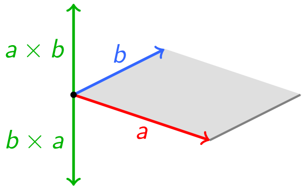


Rechnerisch oder mit der Rechten-Hand-Regel sieht man, dass $a \times b = -b \times a$ ist. Vertauschen der Faktoren hat also den Wechsel des Vorzeichens zur Folge: Das Vektorprodukt zeigt nach dem Vertauschen in die entgegengesetzte Richtung.



1(c) Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die z-Komponente des Vektorprodukts Null ist?

Rechnerisch oder mit der Rechten-Hand-Regel sieht man, dass $a \times b = -b \times a$ ist. Vertauschen der Faktoren hat also den Wechsel des Vorzeichens zur Folge: Das Vektorprodukt zeigt nach dem Vertauschen in die entgegengesetzte Richtung.

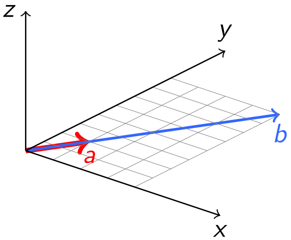


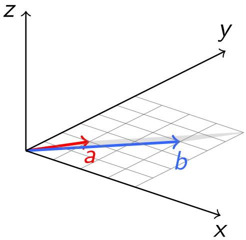
1(c) Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die z-Komponente des Vektorprodukts Null ist?

Die z-Komponente, also der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms, ist 0 genau dann, wenn a und b parallel sind (inbesondere, wenn a oder b der Nullvektor ist).

1(d) Visualisieren Sie die folgenden Vektorenpaare graphisch:

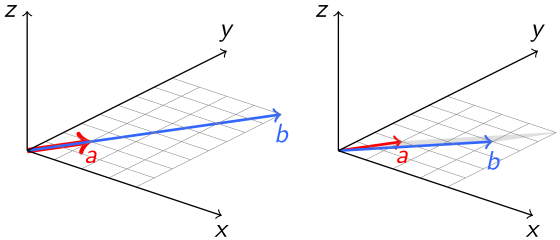
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ebenso } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$





1(d) Visualisieren Sie die folgenden Vektorenpaare graphisch:

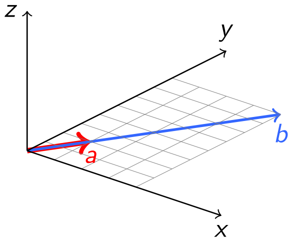
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ebenso } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

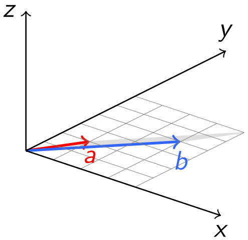


Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die z-Komponente des Vektorprodukts des jeweiligen Vektorenpaars Null ist oder nicht.

1(d) Visualisieren Sie die folgenden Vektorenpaare graphisch:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ebenso } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



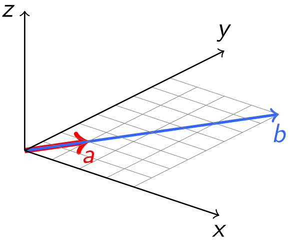


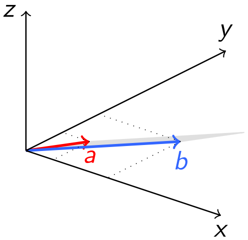
Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die z-Komponente des Vektorprodukts des jeweiligen Vektorenpaars Null ist oder nicht.

Das erste Vektorpaar ist parallel ($b = 4a$), die Fläche des aufgespannten Parallelogramms ist also 0, somit ist $a \times b$ der Nullvektor, die z-Komponente also 0.

1(d) Visualisieren Sie die folgenden Vektorenpaare graphisch:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ebenso } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$





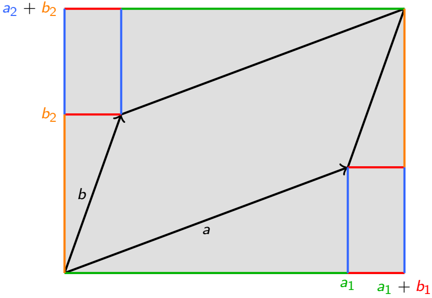
Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die z-Komponente des Vektorprodukts des jeweiligen Vektorenpaars Null ist oder nicht.

Das zweite Vektorpaar ist nicht parallel, die Fläche des aufgespannten Parallelogramms ist also $\neq 0$, somit ist die z-Komponente $\neq 0$.

2(a) Betrachten Sie das untenstehende Parallelogramm, welches von den Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Berechnen Sie die Fläche dieses Parallelogramms. Drücken Sie die Fläche mit Hilfe der Komponenten von a und b aus.

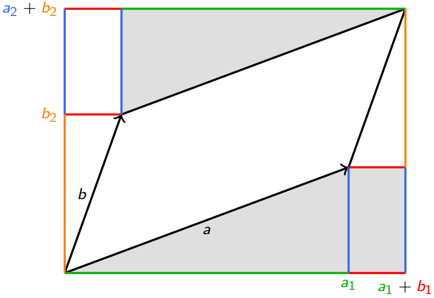


Fläche Rechteck $= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$

2(a) Betrachten Sie das untenstehende Parallelogramm, welches von den Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Berechnen Sie die Fläche dieses Parallelogramms. Drücken Sie die Fläche mit Hilfe der Komponenten von a und b aus.



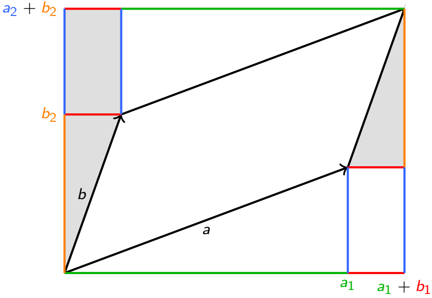
Fläche Rechteck $= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$

Restfläche 1 $= (a_1 + b_1)a_2$

2(a) Betrachten Sie das untenstehende Parallelogramm, welches von den Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Berechnen Sie die Fläche dieses Parallelogramms. Drücken Sie die Fläche mit Hilfe der Komponenten von a und b aus.



Fläche Rechteck $=$
$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$

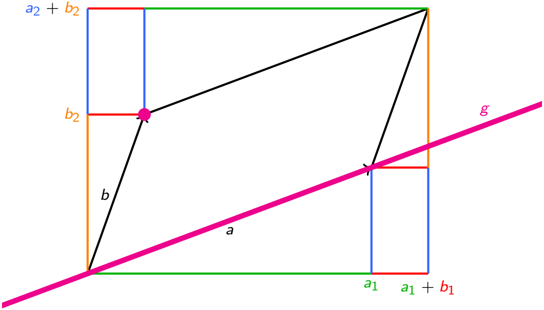
Restfläche 1 $=$
$(a_1 + b_1)a_2$

Restfläche 2 $=$
$(a_2 + b_2)b_1$

Fläche Parallelogramm $=$

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)a_2 - (a_2 + b_2)b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

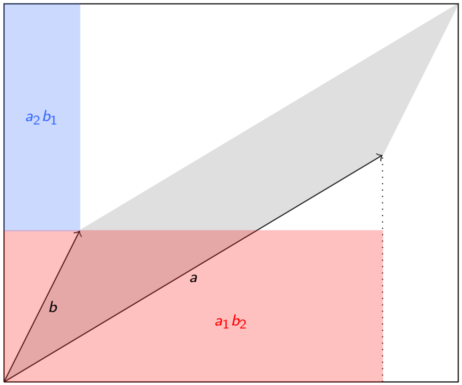
Beachte: Wir haben in der Figur verwendet, dass alle Koordinaten positiv sind und der Punkt (b_1, b_2) oberhalb der Geraden $g = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ liegt.



2(d) Liegt (b_1, b_2) unterhalb der Geraden $g = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$, hat die Berechnung der Fläche mit vertauschten Rollen zu erfolgen:
Fläche Parallelogramm $= b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$

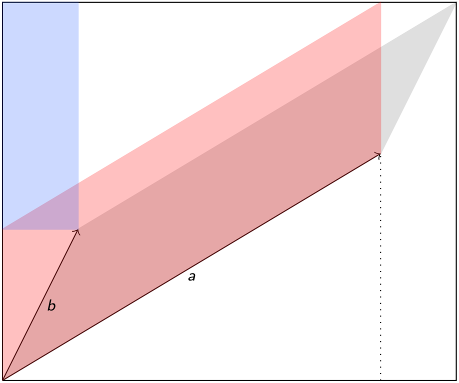
Ganz ohne Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{graue Fläche} &= \text{rote Fläche} - \text{blaue Fläche} \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$



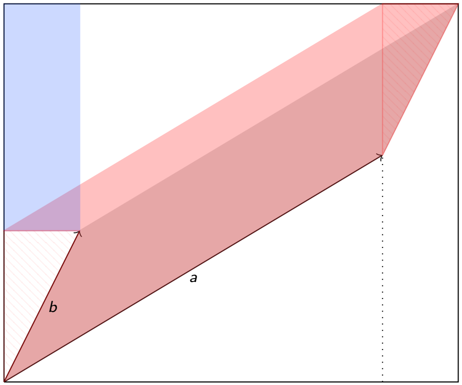
Ganz ohne Rechnung:

$$\text{graue Fläche} = \text{rote Fläche} - \text{blaue Fläche}$$
$$= a_1 b_2 - a_2 b_1$$



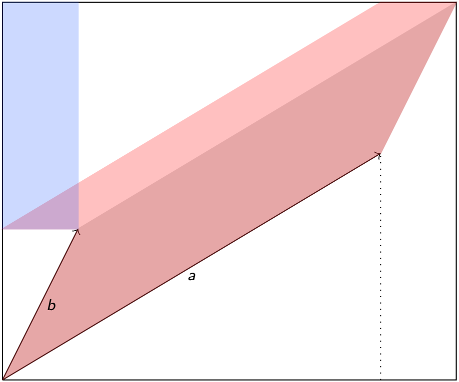
Ganz ohne Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{graue Fläche} &= \text{rote Fläche} - \text{blaue Fläche} \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$



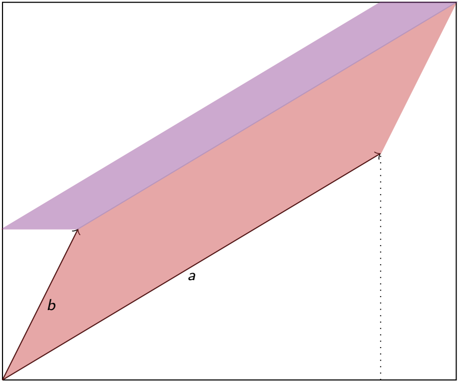
Ganz ohne Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{graue Fläche} &= \text{rote Fläche} - \text{blaue Fläche} \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

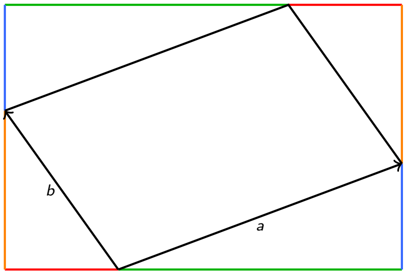


Ganz ohne Rechnung:

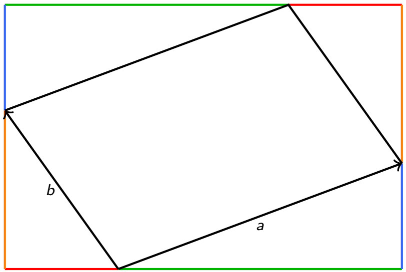
$$\begin{aligned} \text{graue Fläche} &= \text{rote Fläche} - \text{blaue Fläche} \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$



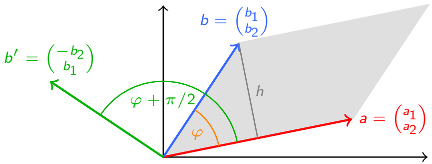
Und wie ist es eigentlich hier?



Und wie ist es eigentlich hier?



Alternativen:



Fläche =

$$
\begin{aligned}
&= \|a\| h \\
&= \|a\| \|b\| \sin \varphi \\
&= -\|a\| \|b\| \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -a \cdot b' \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1
\end{aligned}
$$

2(b) Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die Fläche des Parallelogramms Null ist?

2(b) Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die Fläche des Parallelogramms Null ist?

Die Fläche des Parallelogramms ist null, genau dann, wenn a und b (gleich- oder ungleichsinnig) parallel sind. Das ist auch algebraisch klar:

$$\begin{aligned} a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_1 b_2 = a_2 b_1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (a_1, a_2) = \lambda(b_1, b_2) \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2(c) Visualisieren Sie die folgenden Vektorpaare graphisch:

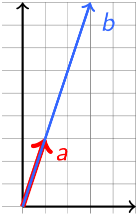
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ ebenso } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

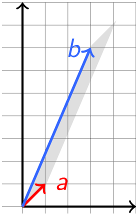
Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die Fläche des Parallelogramms, welches vom jeweiligen Vektorenpaar aufgespannt wird, Null ist oder nicht.

2(c) Visualisieren Sie die folgenden Vektorpaare graphisch:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ ebenso } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die Fläche des Parallelogramms, welches vom jeweiligen Vektorenpaar aufgespannt wird, Null ist oder nicht.





Das erste Paar spannt ein Paralellogramm der Fläche 0 auf, denn die Vektoren sind parallel.

Das zweite Paar spannt ein Paralellogramm der Fläche $\neq 0$ auf, denn die Vektoren sind nicht parallel.

3(a) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = c$, welches durch

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und finden Sie Ausdrücke für x_1 und x_2 in Abhängigkeit von den Matrixeinträgen von A und den Vektorkomponenten von c.

3(a) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = c$, welches durch

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und finden Sie Ausdrücke für x_1 und x_2 in Abhängigkeit von den Matrixeinträgen von A und den Vektorkomponenten von c.

Falls $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ist, liefert Gauss in beiden Fällen ($a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$)

$$x_1 = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad x_2 = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

3(b) Welche Kriterien müssen die Matrixeinträge von A und die Vektorkomponenten von c erfüllen, damit

(i) das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

3(b) Welche Kriterien müssen die Matrixeinträge von A und die Vektorkomponenten von c erfüllen, damit

(i) das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \implies$ eindeutige Lösung, denn dann hat A den Rang 2.

3(b) Welche Kriterien müssen die Matrixeinträge von A und die Vektorkomponenten von c erfüllen, damit

(i) das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \implies$ eindeutige Lösung, denn dann hat A den Rang 2.

(ii) das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat?

3(b) Welche Kriterien müssen die Matrixeinträge von A und die Vektorkomponenten von c erfüllen, damit

(i) das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \implies$ eindeutige Lösung, denn dann hat A den Rang 2.

(ii) das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ und $c = \lambda a$ oder $c = \lambda b \implies$ unendlich viele Lösungen.

3(b) Welche Kriterien müssen die Matrixeinträge von A und die Vektorkomponenten von c erfüllen, damit

(i) das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \implies$ eindeutige Lösung, denn dann hat A den Rang 2.

(ii) das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ und $c = \lambda a$ oder $c = \lambda b \implies$ unendlich viele Lösungen.

(iii) das Gleichungssystem keine Lösung hat?

3(b) Welche Kriterien müssen die Matrixeinträge von A und die Vektorkomponenten von c erfüllen, damit

(i) das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \implies$ eindeutige Lösung, denn dann hat A den Rang 2.

(ii) das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ und $c = \lambda a$ oder $c = \lambda b \implies$ unendlich viele Lösungen.

(iii) das Gleichungssystem keine Lösung hat?

$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ und $c \neq \lambda a$ und $c \neq \lambda b \implies$ keine Lösung.

3(c) Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und denken Sie über die Bedeutung der jeweiligen Gleichungen nach. Bestimmen Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ob es eine eindeutige Lösung hat, unendlich viele Lösungen hat oder keine Lösung hat.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

3(c) Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und denken Sie über die Bedeutung der jeweiligen Gleichungen nach. Bestimmen Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ob es eine eindeutige Lösung hat, unendlich viele Lösungen hat oder keine Lösung hat.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Eindeutige Lösung, denn $2 \cdot 5 - 7 \cdot 2 \neq 0$.

3(c) Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und denken Sie über die Bedeutung der jeweiligen Gleichungen nach. Bestimmen Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ob es eine eindeutige Lösung hat, unendlich viele Lösungen hat oder keine Lösung hat.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Eindeutige Lösung, denn $2 \cdot 5 - 7 \cdot 2 \neq 0$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3(c) Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und denken Sie über die Bedeutung der jeweiligen Gleichungen nach. Bestimmen Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ob es eine eindeutige Lösung hat, unendlich viele Lösungen hat oder keine Lösung hat.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Eindeutige Lösung, denn $2 \cdot 5 - 7 \cdot 2 \neq 0$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Keine Lösung, denn $1 \cdot 10 - 5 \cdot 2 = 0$ und c ist nicht parallel zu den Spalten von A.

3(c) Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und denken Sie über die Bedeutung der jeweiligen Gleichungen nach. Bestimmen Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ob es eine eindeutige Lösung hat, unendlich viele Lösungen hat oder keine Lösung hat.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Eindeutige Lösung, denn $2 \cdot 5 - 7 \cdot 2 \neq 0$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Keine Lösung, denn $1 \cdot 10 - 5 \cdot 2 = 0$ und c ist nicht parallel zu den Spalten von A.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3(c) Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und denken Sie über die Bedeutung der jeweiligen Gleichungen nach. Bestimmen Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ob es eine eindeutige Lösung hat, unendlich viele Lösungen hat oder keine Lösung hat.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Eindeutige Lösung, denn $2 \cdot 5 - 7 \cdot 2 \neq 0$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Keine Lösung, denn $1 \cdot 10 - 5 \cdot 2 = 0$ und c ist nicht parallel zu den Spalten von A.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Unendlich viele Lösungen, denn $1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$ und c ist parallel zu den Spalten von A.

4 Vergleichen Sie Ihre Resultate aus den Aufgaben 1d), 2a) und 3a). Was beobachten Sie?

In jedem Fall spielte die Zahl $a_1 b_2 - a_2 b_1$ die entscheidende Rolle! Was hat es damit auf sich? Gibt es eine analoge Grösse in 3 und mehr Dimensionen?

- Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^n$
- Volumen im $\mathbb{R}^n$
- LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten.

Was sind die **grundlegenden Eigenschaften** dieser Grösse?

4 Vergleichen Sie Ihre Resultate aus den Aufgaben 1d), 2a) und 3a). Was beobachten Sie?

In jedem Fall spielte die Zahl $a_1 b_2 - a_2 b_1$ die entscheidende Rolle! Was hat es damit auf sich? Gibt es eine analoge Grösse in 3 und mehr Dimensionen?

- Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^n$
- Volumen im $\mathbb{R}^n$
- LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten.

Was sind die **grundlegenden Eigenschaften** dieser Grösse?

Das Geheimnis wird bald gelüftet!