

Lösungen 3

1. Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das LGS $Ax = b$ lösbar?

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Falsch. Z.B. existiert für keinen der drei Vektoren $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung.

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Falsch. Für $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert immer mindestens die Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine andere Argumentation: setzt man in $Ax = b$ irgendwas für x ein, so erhält man einen Vektor b für den dieses x eine Lösung ist.

✓ (c) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

Falsch. Nimmt man für b den Nullvektor, so existiert mit $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung, aber $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ wird durch diese Ungleichung ausgeschlossen.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \right).$$

Also gibt es eine Lösung für alle b_1, b_2, b_3 mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

2.

a) Für welche Werte von t schneiden sich die vier Ebenen im \mathbb{R}^3 ?

$$\begin{array}{rcccc} & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & x & + & y & = & 2t \\ 2(x & - & y) & + & t(z + 1) & = & 0. \end{array}$$

b) Das folgende MATLAB-Script visualisiert die Lösung des LGS

$$x + y - z = 5, x - y - z = 0, 4x - z = 2.$$

```
ezsurf('x+y-5')
% plottet den Graphen der Funktion z=f(x,y)=x+y-5 (Sie koennen
% auch andere (zwei) Variablenamen waehlen)
hold on
% hold dient dazu, alle Graphen in derselben Figur anzuordnen
% (Figur nicht schliessen waehrend dem Ausfuehren der Befehle)
ezsurf('x-y')
ezsurf('4*x-2')
hold off
```

Ändern Sie dieses Script so ab, dass es für die im Teil a) gefundenen Werte von t den Schnitt der vier Ebenen visualisiert.

a) Der Schnitt der Ebenen entspricht der Lösungsmenge des Gleichungssystems in den Variablen x, y, z mit Parameter t . Mit dem Gaussverfahren erhalten wir

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2t \\ 2 & -2 & t & -t \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4t \\ 0 & -4 & t & -5t \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4t \\ 0 & 0 & t+4 & -5t \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4t \\ 0 & 0 & 0 & t(t-1) \end{array}$$

Die Verträglichkeitsbedingung $t(t-1) = 0$ ist für $t = 0$ und für $t = 1$ erfüllt. Für $t = 0$ findet man durch Rückwärtseinsetzen $z = 0, y = 0, x = 0$. Für $t = 1$ findet man durch Rückwärtseinsetzen $z = -1, y = 1, x = 1$. Der Schnitt der Ebenen entspricht also jeweils einem einzelnen Punkt.

b) Das folgende MATLAB-Script zeigt den Fall $t = 0$:

```
% t=0
ezsurf('0*x-z')
% "0*x" steht nur da, damit die Achsenlabels automatisch korrekt sind
hold on
ezsurf('2*x+z')
ezsurf('-x+0*z')
ezsurf('x+0*z')
hold off
```

3.

a) Lösen Sie für $n \geq 2$ das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n (i-k)x_i = 1 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.$$

b) Lösen Sie für $n \geq 1$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} &= 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n. \\ y_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

a) Wir lösen das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & n-2 & & 1 \\ -2 & -1 & 0 & \dots & n-3 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ -(n-1) & -(n-2) & -(n-3) & \dots & 0 & & 1 \end{array}$$

Wenn wir für $k = n, n-1, \dots, 2$ von der k -ten Zeile die $(k-1)$ -te Zeile abziehen, erhalten wir

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & & 1 \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist folglich

$$\begin{aligned} x_n &= t_1 \\ x_{n-1} &= t_2 \\ &\vdots \\ x_3 &= t_{n-2} \\ x_2 &= 1 - \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)t_i \\ x_1 &= -1 + \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1)t_i \end{aligned}$$

für $t_1, t_2, \dots, t_{n-2} \in \mathbb{R}$ beliebig.

b) Wir lösen das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & & 0 & 0 \\
 \vdots & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Um die Matrix auf Zeilenstufenform zu bringen, führen wir die folgenden n Schritte durch (nur die erste und letzte Zeile bleiben dabei unverändert):

1. Schritt: Wir ziehen die 1. Zeile von der 2. Zeile ab.
2. Schritt: Wir addieren die 2. Zeile der neuen Matrix zum 2-fachen der 3. Zeile.
- k . Schritt: Wir addieren die k -te Zeile der neuen Matrix zum k -fachen der $(k + 1)$ -ten Zeile.

Somit erhalten wir die Matrix

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & \dots & & 0 & 0 \\
 \vdots & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & & & 0 & 0 & -(n+1) & n & 0 \\
 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Nach Normieren der Zeilen wird diese zu

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \dots & & 0 & 0 \\
 \vdots & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & & & 0 & 0 & 1 & -\frac{n}{n+1} & 0 \\
 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$y_k = \frac{k}{n+1} \quad \text{für} \quad k = n+1, n, n-1, \dots, 1, 0.$$

4. Numerische Problematik bei linearen Gleichungssystemen:

a) Lösen Sie

$$\begin{pmatrix} 1044.005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

b) "Lösen" Sie mit einem gewöhnlichen Taschenrechner

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

c) Zeigen Sie, dass jedes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, das zur Lösungsmenge beider Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gehört, auch eine Lösung von **b)** ist und lösen Sie damit **b)**.

a) Offensichtlich lautet die Lösung $x = 0, y = 1$.

b) Mit dem Taschenrechner findet man die Lösung $x = 0, y = 1$ (oder je nach Taschenrechner zumindest eine Lösung mit relativ grossem Fehler). Beim Einsetzen ins Gleichungssystem sieht man jedoch, dass diese falsch ist. Der Rundungsfehler ist zu gross!

c) Falls

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gelten, gilt auch

$$\left[\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ist $x = 2, y = -2$. Durch Einsetzen sieht man, dass diese auch eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}$$

ist. Folglich ist $x = 2, y = -2$ eine Lösung von **b)**. Da der Rang des LGS in **b)** gleich 2 ist, ist diese Lösung eindeutig.