Lösungen 5

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Seien u und v Lösungen des LGS $Ax = b$ mit n Unbekannten. Der Rang des LGS sei r. Falls $n = r$ gilt, so folgt $u = v$.

Richtig. Dies ist Satz 1.2 aus der Vorlesung.

(b) Sei $Ax = 0$ ein HLGS und $x \neq 0$ eine Lösung davon. Dann ist der Rang r des Gleichungssystems gleich der Anzahl n der Unbekannten.

Falsch. Laut Korollar 1.3 der Vorlesung hat das HLGS genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $r < n$.

(c) Sei $Ax = b$ ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist der Rang r grösser als die Anzahl m der Gleichungen.

Falsch. Laut Korollar 1.5 der Vorlesung ist das LGS genau dann nicht für alle b lösbar, wenn $r < m$.

√ (d) Sei $Ax = b$ ein LGS mit n Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. $u \neq 0$ sei eine Lösung des HLGS $Ax = 0$ und v eine Lösung von $Ax = b$. Dann hat $Ax = b$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

Richtig. Weil das HLGS eine nichttriviale Lösung besitzt, ist der Rang $r < n$. Und weil das LGS $Ax = b$ mit v eine Lösung besitzt, kann diese nach Satz 1.2 der Vorlesung nicht eindeutig sein. Konkret ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $v + \lambda u$ eine Lösung von $Ax = b$: Es gilt nämlich $A(v + \lambda u) = Av + \lambda Au = b + \lambda \cdot 0 = b$.

2. Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von a – den Rang des folgenden Gleichungssystems mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2+3a)x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a & 0 \\ -2 & -1 & a & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & a^2+3a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 6+a & 3 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 0 \end{array}$$

Es gilt $a^2+3a-4=0$, wenn

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow a = 1 \text{ oder } a = -4.$$

Der Rang des Gleichungssystems ist 4, falls $1+a \neq 0$ und $a^2+3a-4 \neq 0$, also für $a \notin \{-4, -1, 1\}$.
Der Rang des Gleichungssystems ist 3, falls $a \in \{-4, -1, 1\}$.

3. Bestimmen Sie, welche Matrizen B mit der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ kommutieren, d.h. für welche B die Gleichung $AB = BA$ gilt.

Sei $B = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Damit man die gewünschte Gleichung erhält, müssen die zwei Matrizen AB und BA koeffizientenweise übereinstimmen. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{21} & 3b_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & 2b_{11} + 3b_{12} \\ b_{21} & 2b_{21} + 3b_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{11} + 2b_{21} &= b_{11} \\ b_{12} + 2b_{22} &= 2b_{11} + 3b_{12} \\ 3b_{21} &= b_{21} \\ 3b_{22} &= 2b_{21} + 3b_{22}. \end{aligned}$$

Es ist einfach nachzurechnen, dass die Lösungsmenge davon

$$\begin{aligned} b_{11} &= s \\ b_{12} &= t \\ b_{21} &= 0 \\ b_{22} &= s + t \end{aligned}$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ ist. Folglich erfüllen genau die Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s+t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Bedingung $AB = BA$.

4. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dann ist das Vektorprodukt von x und y definiert als

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix B so, dass

$$x \times y = By.$$

b) Zeigen Sie, dass $x \times y$ senkrecht auf x und y steht.

c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten nach:

$$\begin{aligned} &a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c && \text{(Grassmann)} \\ &a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 && \text{(Jacobi)} \\ &(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d) && \text{(Lagrange)} \end{aligned}$$

d) Verwenden Sie die Lagrange-Identität um zu zeigen, dass

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\| \sin \varphi$$

gilt, wobei $0 \leq \varphi \leq \pi$ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors $a \times b$ gleich der Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist.

Hinweis: Es gilt

$$a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos \varphi.$$

a) Für

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$x \times y = By.$$

b) Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt. Nachrechnen ergibt

$$\begin{aligned} x \cdot (x \times y) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Berechnung von $y \cdot (x \times y)$ geht analog.

c) Grundsätzlich lassen sich alle drei Identitäten direkt mit den Definitionen nachrechnen. Die Grassmann-Identität rechnet man beispielsweise wie folgt nach:

$$\begin{aligned}
a \times (b \times c) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Grassmann-Identität kann man die Jacobi-Identität zudem sehr elegant herleiten:

$$\begin{aligned}
& a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) \\
= \; & (a \cdot c)b - (a \cdot b)c + (b \cdot a)c - (b \cdot c)a + (c \cdot b)a - (c \cdot a)b \\
= \; & (a \cdot c - c \cdot a)b + (b \cdot a - a \cdot b)c + (c \cdot b - b \cdot c)a \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist.

d) Aus der Lagrange-Identität und dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= (a \times b) \cdot (a \times b) \\
&= (a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2 \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 - (\|a\| \|b\| \cos(\varphi))^2 \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos(\varphi)^2) \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 \sin(\varphi)^2.
\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man das gewünschte Resultat.