

## Lösungen 6

“Buch” steht im Folgenden für K. Nipp/D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ✓ (a) Sei  $A$  symmetrisch und regulär. Dann ist auch  $A^{-1}$  symmetrisch.

Richtig, denn  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ . Die Regel  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$  folgt aus  $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$  (der erste Schritt benutzt  $(AB)^T = B^T A^T$ , siehe Serie 4 Aufgabe 1).

- ✓ (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $A$  genau für  $a = \pm\sqrt{3/2}$  orthogonal.

Richtig.  $A^T A = I$  gilt genau für diese beiden Werte. Nachrechnen liefert:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{4} + \frac{5}{8} & \frac{a^2}{4} - \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{a^2}{4} - \frac{3}{8} & \frac{a^2}{4} + \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

(die Matrix muss symmetrisch sein (siehe Serie 4 Aufgabe 1), also beim Ausrechnen nicht unnötig arbeiten!) und  $\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} = 1$  hat genau die gegebenen Werte als Lösungen. Dies gilt ebenso für  $\frac{a^2}{4} + \frac{5}{8} = 1$  und  $\frac{a^2}{4} - \frac{3}{8} = 0$ .

- (c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singular sind.

Falsch, eine orthogonale Matrix  $A$  besitzt immer die Inverse  $A^T$ , da per Definition  $A^T A = I$  gilt und (für quadratische Matrizen) aus  $X A = I$  immer  $X = A^{-1}$  folgt.

2.

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass  $A$  regulär ist.

b) Für welche Werte des Parameters  $\gamma$  ist

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

a) Nach Satz 2.8 aus dem Buch gilt für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$ :

$A$  ist regulär  $\Leftrightarrow$  das Gleichungssystem  $Ax = 0$  hat nur die triviale Lösung  $x = 0$ .

Also reicht es die Lösungsmenge von  $Ax = 0$  zu betrachten. Wir verwenden den Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Die einzige Lösung hier ist  $x = 0$ , deshalb ist  $A$  regulär.

b) Aus Satz 2.8 folgt auch für jede  $n \times n$ -Matrix  $B$ :

$B$  ist singulär  $\Leftrightarrow$  das Gleichungssystem  $Bx = 0$  hat nichttriviale Lösungen.

Deshalb betrachten wir die Lösungsmenge von  $Bx = 0$ :

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & \gamma & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & \gamma & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \gamma - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \\ 0 & 0 & (4 - \gamma)(\gamma + 2) & 0 \end{array}$$

Falls  $(4 - \gamma)(\gamma + 2) = 0$  ist, ist  $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$  ein freier Parameter und  $Bx = 0$  besitzt nichttriviale Lösungen. Somit ist  $B$  singulär für  $\gamma \in \{-2, 4\}$ .

3. Sei  $\mathbb{I}_2$  die  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix und  $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ .

- a) Für welche Werte des Parameters  $\alpha$  ist die Matrix  $V := \mathbb{I}_2 - \alpha u u^T$  orthogonal?  
 b) Lösen Sie für die in a) ermittelten Werte von  $\alpha$  das Gleichungssystem

$$Vx = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

- c) Kontrollieren Sie a) und b) mit MATLAB.

a) Wir können die gesuchten Werte von  $\alpha$  wie folgt finden:  $V$  ist orthogonal, falls  $V^T V = I_2$ . Da  $I_2^T = I_2$  und  $(u u^T)^T = u u^T$ , folgt

$$V^T = (I_2 - \alpha u u^T)^T = I_2 - \alpha u u^T = V$$

und damit

$$\begin{aligned} V^T V &= V V = (I_2 - \alpha u u^T)(I_2 - \alpha u u^T) \\ &= I_2 I_2 - 2I_2 \alpha u u^T + \alpha u u^T \alpha u u^T \\ &= I_2 - 2\alpha u u^T + \alpha^2 \underbrace{u^T u}_{=1} u u^T \\ &= I_2 + (\alpha^2 - 2\alpha)u u^T. \end{aligned}$$

Bemerkung:  $u u^T$  ist eine  $2 \times 2$ -Matrix, aber  $u^T u$  ist eine reelle Zahl (oder  $1 \times 1$ -Matrix).

Weiter, da  $u u^T \neq 0$ , gilt  $V^T V = I_2$  genau dann, wenn  $\alpha^2 - 2\alpha = 0$ , also für  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = 2$ . Für  $\alpha = 0$  ist  $V = I_2$  trivialerweise orthogonal.

Allgemeiner ist eine  $n \times n$ -Matrix von der Form  $I_n - 2u u^T$  mit  $u^T u = 1$  immer orthogonal. Man nennt eine solche Matrix *Householder-Matrix*. Siehe dazu Seite 32 im Buch.

- b) Für  $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned} Vx &= I_2 x = x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \text{also } x &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für  $\alpha = 2$ : Da  $V$  orthogonal und symmetrisch ist, gilt  $V^{-1} = V^T = V$ . Also:

$$\begin{aligned} x &= V^{-1} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \text{also } x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Rechnung oben zeigt, dass für eine Householder-Matrix  $Q$  immer  $Q^T = Q$  gilt.

```

c) %a)
u = [sqrt(3)/2;1/2];
A = eye(2)-2*(u*u. ');

%Bestimmt die Matrix V fuer alpha = 2. eye(2) bezeichnet die Einheitsmatrix
%der Dimension 2x2.

B=eye(2);

%B ist die Matrix V fuer den Parameter alpha = 0.

A'*A

%Prueft, ob A orthogonal ist. ' transponiert eine Matrix. Sie ist genau dann
%orthogonal, wenn A'*A = eye(2) gilt, und das wird auch
%von der Ausgabe angezeigt. Bemerke aber, dass die logische Aussage
%A'*A = eye(2) falsch ist; dies liegt nur an winzigen Rundungsfehlern.
B'*B

%Auch dies ergibt - trivialerweise - die Identitaet, also sind beide
%Matrizen orthogonal.

%b)
xA = [0;2];
xB = [-sqrt(3);1];

%Initialisiert die Variablen fuer die berechneten Loesungen x.

A*xA
B*xB

%Bestimmt in den jeweiligen Faellen das Produkt der Matrix V mit dem Vektor
%x. Die Ausgabe zeigt jeweils den Vektor [-sqrt(3);1], was verifiziert,
%dass die Loesungen in der Tat korrekt sind.

```

4. Gegeben sei die  $2 \times 2$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- a) Für welche  $a, b, c, d$  ist  $A$  regulär?  
 b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelten Werte von  $a, b, c, d$  die Inverse  $A^{-1}$ .
- a) Nach Satz 2.8 aus dem Buch gilt für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$ :

$A$  ist regulär  $\Leftrightarrow$  das Gleichungssystem  $Ax = 0$  hat nur die triviale Lösung  $x = 0$ .

Also reicht es, die Lösungsmenge von  $Ax = 0$  zu betrachten. Wir verwenden den Gauss-Algorithmus:

Fall  $a \neq 0$ : Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ a & b & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang 1 genau dann, wenn  $d - \frac{bc}{a} = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$  gilt. Folglich ist die Matrix regulär genau dann, wenn  $ad - bc \neq 0$  gilt.

Fall  $a = 0$ : Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ c & d & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang  $< 2$  genau dann, wenn entweder  $b$  oder  $c$  Null ist, also wenn  $bc = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$  gilt. Folglich ist die Matrix regulär genau dann, wenn  $ad - bc \neq 0$  gilt.

- b) Sei  $A$  regulär, also  $ad - bc \neq 0$ . Setze  $X := A^{-1}$  und benutze die Notationen

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}, e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung  $AX = I_2$  folgt, dass  $Ax^{(1)} = e^{(1)}$  sowie  $Ax^{(2)} = e^{(2)}$  gelten muss. Insofern entspricht  $AX = I_2$  einem Gleichungssystem mit zwei rechten Seiten. Wir lösen es mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Fall  $a \neq 0$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 + \frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} ad - bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right).$$

Daraus folgt

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Fall  $a = 0$ : Da  $ad - bc \neq 0$  gilt, gilt  $b \neq 0$  und  $c \neq 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} c & 0 & -\frac{d}{b} & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array} \right) &= \frac{1}{ad - bc} \left( \begin{array}{cc|cc} ad - bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right). \end{aligned}$$

Also gilt auch für  $a = 0$ :

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$