

Lösungen 8

1. Bestimmen Sie das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ✓ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{7}{10} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -\frac{46}{15} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 0 & -16 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$
- ✓ (e) Keine der genannten Möglichkeiten.

3. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

✓ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Die Matrix ist nicht invertierbar.

Mit Hilfe der Formel

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

folgt sofort die richtige Antwort.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser möchten wir die erste Spalte extrahieren. Das heisst, das Produkt von rechts oder links mit einer weiteren Matrix ist die erste Spalte von A . Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(a) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Falsch, diese Multiplikation ist nicht definiert.

(b) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Falsch, dies ergibt eine 3×2 -Matrix, die aus der Matrix A durch Ersetzen der zweiten Spalte mit Nullen entsteht.

(c) Multiplikation von links mit $(0 \ 1 \ 0)$.

Falsch, dies ergibt die zweite Zeile von A .

(d) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Falsch, diese Multiplikation ist nicht definiert.

✓ (e) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Richtig.

5. Sei A eine 4×4 -Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung.
- ii) $Ax = b$ hat für jedes b mindestens eine Lösung.

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe K. Nipp/D. Stoffer, Lineare Algebra (5. Auflage), Satz 2.8 und benutze folgende Äquivalenz: (i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung \iff (iii) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.

Denn (i) mit $b = 0$ impliziert (iii) und die Negation von (i) – also ein b mit zwei Lösungen $x_1 \neq x_2$ – führt zu einer nicht-trivialen Lösung $A \underbrace{(x_1 - x_2)}_{=: x \neq 0} =$

$Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$ des homogenen Gleichungssystems.

6. Für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^\top$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$
...

- ✓ (a) keine Lösung.
(b) eine eindeutige Lösung.
(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.
(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss sich b als Linearkombination der Spalten ausdrücken lassen. Da die dritte Spalte nur das zweifache der ersten ist, können wir diese ignorieren und versuchen b als Linearkombination der ersten beiden Spalten zu schreiben. Dies ist aber nicht möglich, da die dritte Komponente von b Null ist und daher der erste Spaltenvektor in der Linearkombination nicht vorkommen darf - und somit b also ein Vielfaches der zweiten Spalte sein müsste.

Alternativ kann man den Gauss-Algorithmus verwenden, um das System mit rechter Seite b in Zeilenstufenform zu bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array} \right)$$

Damit sieht man sofort, dass es keine Lösung geben kann, da $-3/2 \neq 0$.

7. Sei A eine 2×3 -Matrix. Dann existiert eine 3×2 -Matrix B , welche nicht die Nullmatrix ist, aber trotzdem gilt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- ✓ (a) Richtig.
(b) Falsch.

Für eine 2×3 -Matrix gibt es im Gaussenschema immer mindestens eine Nicht-Pivotspalte. Damit lassen sich nichttriviale Lösungen mit einem freien Parameter für das homogene System finden. Sei also $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ eine solche nichttriviale Lösung und definiere $B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$ (\neq Nullmatrix). Dann ist

$AB = \left(Ax \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ die 2×2 -Nullmatrix.

8. Für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0 \dots$

- (a) keine Lösung.
- (b) eine eindeutige Lösung.
- ✓ (c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.
- (d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Wir lesen den Rang der Matrix ab, indem wir erkennen, dass die erste und dritte Spalte linear abhängig sind. Somit ist $\text{Rang } A = 2$. Da A eine 3×3 -Matrix ist, muss das homogene Gleichungssystem Lösungen mit $3 - 2 = 1$ freien Parameter besitzen. Falls wir den Rang nicht direkt ablesen können, kann man auch den Gauss-Algorithmus anwenden um die Matrix in Zeilenstufenform zu bringen (siehe Aufgabe 6).

9. Für die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2 - 7 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt:

- (a) Für $a = 1$ ist B nicht invertierbar.
- ✓ (b) $\text{Rang } B \geq 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
- ✓ (c) Für $a = 0$ ist $\det B = 0$.

Wir bringen die Matrix mit Gauss in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2 - 7 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & a^2 - 9 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + 1 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Damit lesen wir die richtigen Aussagen anhand der entstehenden Nullzeilen von B ab.

10. Der Rang von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

beträgt...

- (a) 0.
- (b) 1.
- ✓ (c) 2.
- (d) 3.
- (e) 4.

Der Rang ist die Anzahl linear unabhängiger Spalten oder Zeilen von A . Die ersten zwei Zeilen von A sind linear unabhängig, die dritte Zeile ergibt sich als Summe der ersten beiden, also ist $\text{Rang } A = 2$.

11. Seien A, B zwei symmetrische Matrizen. Dann ist das Produkt AB auch symmetrisch.

- (a) Richtig.
- ✓ (b) Falsch.

Im Allgemeinen ist die Aussage falsch – die Matrizen müssten kommutieren (d.h. $AB = BA$) damit das Produkt wieder symmetrisch ist. Am einfachsten zeigt dies ein Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind beide symmetrisch aber das Produkt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ist es nicht.

12. Gegeben sei eine orthogonale Matrix A mit Inverser A^{-1} . Dann gilt:

✓ (a) $A^{-1} = A^T$

Richtig, Orthogonalität ist genau über diese Eigenschaft definiert ($A^T A = I$ ist nur eine andere Form dies niederzuschreiben).

(b) $A^{-1} = 2A$

Dies ist nie möglich für eine orthogonale Matrix.

(c) $A^{-1} = -A$

Für gewisse orthogonale Matrizen kann dies richtig sein, im Allgemeinen ist es jedoch falsch.

(d) Die Inverse existiert nicht.

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

13. Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

✓ (a) A_1 ist nicht orthogonal.

Richtig, die Spalten sind zwar normiert, aber das Skalarprodukt beider Spalten ist 1 – sie stehen also nicht orthogonal zueinander. Auch ist A_1 noch nicht einmal invertierbar, aber jede orthogonale Matrix ist invertierbar.

(b) A_2 ist nicht orthogonal aber die inverse A_2^{-1} ist es.

Falsch. Es ist zwar richtig, dass A_2 nicht orthogonal ist (die zweite Spalte ist nicht normiert), aber dann ist automatisch auch die Inverse nicht orthogonal. Eine Matrix A ist orthogonal genau dann wenn die Inverse es ist.

14. Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

- (a) A_1 ist orthogonal.

Falsch, die zweite Spalte ist nicht normiert, aber die Spalten stehen orthogonal zueinander.

- (b) A_2 ist orthogonal.

Falsch, die Spalten sind nicht orthogonal zueinander (aber sie sind normiert).

- ✓ (c) Keine der genannten Möglichkeiten.

15. Sei A eine $m \times n$ -Matrix mit $m > n$, so dass $A^\top A$ die Einheitsmatrix \mathbf{I}_n ist. Dann gilt:

- (a) A ist orthogonal und $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Falsch, denn A ist keine quadratische Matrix (insbesondere nicht invertierbar) und somit nicht orthogonal.

- ✓ (b) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Richtig, denn $\|A\mathbf{x}\| = \sqrt{(A\mathbf{x})^\top A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^\top A^\top A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$.

- (c) Sei B eine $n \times m$ -Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Falsch, das gilt nie. Ein Gegenbeispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $A^\top A = \mathbf{I}_2$ und mit $B = A^\top$ ist also BA orthogonal, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht orthogonal (noch nicht einmal invertierbar). Oder noch einfacher: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann $A^\top A = \mathbf{I}_1$ (die 1×1 -Einheitsmatrix welche natürlich orthogonal ist) und mit $B = A^\top$ ist BA orthogonal, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht orthogonal.

16. Gegeben sei die $n \times n$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & 1 & * & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ n & 1 & & & \end{pmatrix},$$

wobei nur die ersten beiden Spalten bekannt sind. Angenommen es existiert eine LR-Zerlegung $LR = A$, was können Sie darüber aussagen?

- (a) Die erste Spalte von L ist $(1 \quad -2 \quad -3 \quad \dots \quad -n)^T$.
- (b) Die erste Spalte von L ist $(-1 \quad -2 \quad -3 \quad \dots \quad -n)^T$.
- ✓ (c) Die erste Spalte von L ist gleich der ersten Spalte von A .
Richtig, die erste Spalte von L ist $(1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n)^T$, da $a_{11} = 1$ gilt.
- (d) Man muss die gesamte Matrix A kennen um die erste Spalte von L zu bestimmen.
- (e) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 0.
- (f) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 1.
- (g) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 3.
- (h) Man muss die gesamte Matrix A kennen um den Eintrag r_{22} der Matrix R zu bestimmen.

Der erste Schritt der LR-Zerlegung ist

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ n & n & 1 & \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 1 & \\ \hline 0 & -1 & \\ 0 & -2 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & \end{array} \end{array} \rightarrow \dots,$$

woraus man die erste Spalte von L und $r_{22} = -1$ ablesen kann.