

## Lösungen 9

1. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1?$$

- (a) Für jedes  $x$ .
- (b) Für kein  $x$ .
- ✓ (c) Für  $x = 0$
- ✓ (d) Für  $x = 2$ .
- (e) Für  $x = 4$ .

Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1.$$

Dies ist für  $x_1 = 0$  oder  $x_2 = 2$  gleich 1.

2. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0.4 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von  $A$ , d.h. eine Linksdreiecksmatrix  $L$ , eine Rechtsdreiecksmatrix  $R$  und eine Permutationsmatrix  $P$ , für welche  $PA = LR$  gilt.

b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme  $Ax = b_i$ ,  $i = 1, 2$ , mit Hilfe von a) für

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1.75 \\ 4.5 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von  $A$  mit MATLAB.

d) Lösen Sie die Gleichungssysteme aus b) mit MATLAB.

**Lösung:**

a)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 0 & 2 & 0.4 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 6
 \end{array}
 \xrightarrow{(E)_1}
 \begin{array}{|ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5 \\
 0 & 0 & 1 & -4/5 & 4/5 & 38/5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{|ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & -4/5 & 4/5 & 38/5 \\
 0 & 1 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5
 \end{array}
 \xrightarrow{(E)_2}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) i.  $Lc = Pb_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 7 \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 = -2 \Rightarrow c_2 = \frac{18}{5} \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 = 3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\Rightarrow c = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

$Rx = c$ :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{18}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \Rightarrow x_3 = 1 \\ \frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 = \frac{18}{5} \Rightarrow x_2 = -5 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii.  $Lc = Pb_2$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 4.5 \\ 1.75 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 3.75 = \frac{15}{4} \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 &= 4.5 \Rightarrow c_2 = \frac{15}{2} \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 &= 1.75 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 7.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

$Rx = c$  :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 7.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{5}x_3 &= 0.25 \Rightarrow x_3 = \frac{5}{4} \\ \frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 &= 7.5 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{2} \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3.75 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}.$$

c)  $A = [5 \ 1 \ 2; \ 2 \ 0.4 \ 1; \ -4 \ 0 \ 6]$ ;  
 $[L, R, P] = \text{lu}(A)$

d)  $A = [5 \ 1 \ 2; \ 2 \ 0.4 \ 1; \ -4 \ 0 \ 6]$ ;  
 $b_1 = [7 \ 3 \ -2]'$ ;  
 $b_2 = [3.75 \ 1.75 \ 4.5]'$ ;  
 $[L, R, P] = \text{lu}(A)$ ;  
 $c_1 = L \setminus (P * b_1)$ ;  
 $x_1 = R \setminus c_1$ ;  
 $c_2 = L \setminus (P * b_2)$ ;  
 $x_2 = R \setminus c_2$

3. Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und von} \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:**  $\det M = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$

Dabei haben wir zuerst die erste und die dritte Zeile vertauscht (daher kommt das negative Vorzeichen) und danach auf die so entstandene Matrix den Gauss-Algorithmus angewandt, was die Determinante unverändert lässt.

$\det N = 0$ , da die zweite Zeile die Summe der ersten und der dritten ist.

4. Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/(2\sqrt{2}) & \sqrt{3}/(2\sqrt{2}) & 1/\sqrt{2} \\ -1/(2\sqrt{2}) & \sqrt{3}/(2\sqrt{2}) & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie mit MATLAB die Determinante von  $M$ .
- b) Geben Sie allgemein an, welche Werte für die Determinante einer orthogonalen Matrix überhaupt in Frage kommen (Begründung!).

**Lösung:**

- a) `M=[sqrt(3)/2 1/2 0;  
-1/(2*sqrt(2)) sqrt(3)/(2*sqrt(2)) 1/sqrt(2);  
-1/(2*sqrt(2)) sqrt(3)/(2*sqrt(2)) -1/sqrt(2)]`  
`det(M)`

- b) Allgemein gilt:  $M$  ist orthogonal, falls  $M^T M = I_n$ . Aus

$$\det(M^T M) = \det M^T \det M = (\det M)^2$$

folgt für  $M$  orthogonal:

$$(\det M)^2 = \det(M^T M) = \det I_n = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1.$$